

Analyse und Simulation des Kraftübertragungsverhaltens von Mecanum-Rädern

Marian Göllner^{1*}, Xiaobo Liu-Henke¹, Ludger Frerichs²

¹Institut für Mechatronik, Ostfalia Hochschule für angewandte Wissenschaften, Salzdahlumer Str. 46/48, 38302 Wolfenbüttel; *mar.goellner@ostfalia.de

²Institut für mobile Maschinen und Nutzfahrzeuge, Technische Universität Braunschweig, Langer Kamp 19a, 38106 Braunschweig

Abstract. Im vorliegenden Beitrag wird exemplarisch eine Methode zur Auslegung eines Mecanum-Rades unter Berücksichtigung der Abrollgeometrie und der wirkenden Kräfte aufgezeigt. Die Berechnungsergebnisse werden anschließend auf Grundlage von Erkenntnissen der Tribologie mit den zu erwartenden Reibeigenschaften des Rades zum Grund verknüpft, um Erkenntnisse zur Modellierung von Reibung in der Simulation dynamischer Systeme zu gewinnen.

Einleitung

Um in engen Arealen und streng vorgegebenen Bahnen, bspw. Intralogistiksysteme in einem Fabrikumfeld, effizient manövrieren zu können, bedarf es omnidirektionaler Antriebe, die auf Grundlage von Allseitenrädern funktionieren, welche über einen passiven Freiheitsgrad verfügen und daher keine zusätzlichen nicht-holonomen Bindungen bei der Integration in ein Fahrwerk verursachen. Der passive Freiheitsgrad wird bei diesen sog. Allseitenrädern durch Montage von frei drehbaren, tonnenförmigen Rollen (Radtonnen) auf dem Radumfang realisiert [1]. Man unterscheidet nach dem Winkel Γ zwischen Rollrichtung der umlaufenden Tonne und der horizontalen Achse nach Mecanum-Rädern ($\Gamma = 45^\circ$) und Omniwheels ($\Gamma = 90^\circ$). Dabei weisen Mecanum-Räder nach Untersuchungen von [2] bessere Eigenschaften bei der Höhe der zu transportierenden Last, der Kraftübertragung und der Flächenpressung im Bezug zu ihrer Größe und ihrem Gewicht auf. Aufgrund dessen haben sich für den Einsatz in Intralogistiksystemen Mecanum-Räder durchgesetzt. Die hier hergeleiteten Gleichungen sind also gerade in dieser Domäne von besonderer Relevanz

Die Fachgruppe für Regelungstechnik und Fahrzeugmechatronik des Instituts für Mechatronik

der Ostfalia Hochschule hat zwei Funktionsträger im Bezug zur Intralogistik aufgebaut, welche beide über Mecanum-Radkonfigurationen angetrieben werden. Nachfolgend sind beide Forschungsträger in Abbildung 1 dargestellt.

1 Motivation

Die Analyse und Simulation des Kraftübertragungsverhaltens der Mecanum-Räder gestaltet sich aufgrund der komplexen Beschaffenheit der interagierenden Oberflächen als technisch anspruchsvoll, weshalb in der vorliegenden Arbeit die Zusammenhänge zwischen den kinematischen und geometrischen Abrollbedingungen und den daraus folgenden Kontaktpunkten zwischen Rad und Fläche genutzt werden, um die Flächenpressung zwischen diesen herzuleiten und auf dieser Basis eine Aussage über das reibbedingte Kraftübertragungsverhalten zu treffen. Weiterhin sollen diese Erkenntnisse in ein Simulationsmodell einfließen, in dem das Übertragungsverhalten dynamisch rückgekoppelt wird.

So lassen sich Aussagen über Optimierungssätze der konstruktiven Gestaltung der Mecanum-Räder bezüglich ihrer Abrolleigenschaften und der Linearität der Kraftübertragung treffen. Eine optimale Kraftübertragung stellt sich durch einen im Idealfall konstanten, in der Praxis zumindest linearen Verlauf bezüglich des Radumfangs dar, sodass diese unter Echtzeitanforderungen in einem Regelsystem berücksichtigt werden kann. Dazu werden exemplarisch an den beiden Forschungsträgern AGV und S-Mobile die zur Untersuchung notwendigen Zusammenhänge hergeleitet. Das AGV repräsentiert hier den Stand der Technik, da seine Antriebskonfiguration der in [3] hergeleiteten üblichen Konfiguration entspricht. Das S-Mobile hingegen stellt einen Sonderfall dar, da hier die Mecanum-Räder auf einer Kugel ablaufen. In [4]

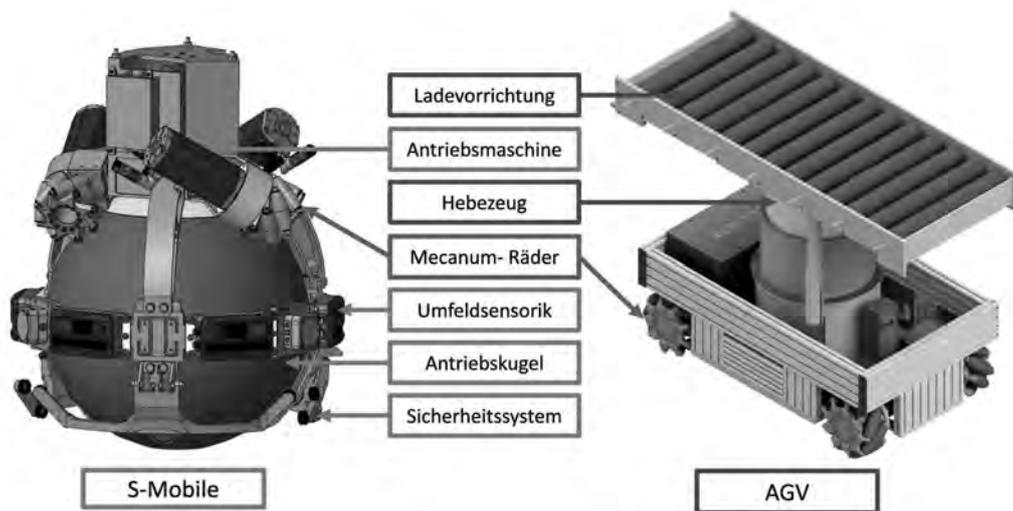


Abbildung 1: Das S-Mobile und das AGV, Forschungsträger der Fachgruppe für Regelungstechnik und Fahrzeugmechanik

wurde diesbezüglich bereits eine geometrische Methode hergeleitet mit der dieser Umstand berücksichtigt und ein ruhiges und gleichmäßiges Abrollen der Räder auf der Kugeloberfläche sichergestellt und mithilfe von CAE Methoden bewiesen werden konnte.

Da das Kraftübertragungsverhalten weiterhin nicht kontinuierlich ist und sich die Übertragungspunkte ungleichmäßig auf dem Umfang der Radtonnen verteilen, sollen im Folgenden die Kraftübertragungsverhältnisse untersucht und Möglichkeiten der Simulation sowie späteren Nutzung der Ergebnisse zur Kompensation der gefundenen Effekte hergeleitet werden. Ansatz zur Untersuchung ist dabei zunächst die Analyse der interagierenden Oberflächen und deren geometrischer Eigenschaften. Mithilfe dieser lassen sich Aussagen über die inneren Spannungszustände der Materialien der interagierenden Oberflächen wie in [5] herleiten. Eine Verknüpfung der Materialzustände zu deren Reibverhalten und somit direkt zu deren Kraftübertragungseigenschaften ist aus der Tribologie in Form von Reibkennwertkurven nach [6] bekannt.

Folgende sollen nach dem etablierten Modellbildungsprozess zunächst anhand der realen Gestalt der Mecanum-Räder Modelle der Oberfläche und deren Material-bedingter Spannungszustände hergeleitet und in mathematische Gleichungen überführt werden.

2 Modellbildungsprozess

Im Rahmen dieser Arbeit wird unter anderem die Modellbildung des Kraftübertragungsverhaltens durchgeführt. Der dazu notwendige Modellbildungsprozess (vgl. Abbildung 2) basiert auf dem realen System, welches gemäß der Aufgabenstellung reduziert bzw. vereinfacht wird, sodass sich ein physikalisches Modell ergibt. Dieses wird mithilfe physikalischer Gesetzmäßigkeiten in ein mathematisches Modell überführt, welches wiederum bspw. in Form von Signalflussplänen im Rechner abgebildet und mithilfe von CAE-Werkzeugen und entsprechender Numerik simuliert werden kann.

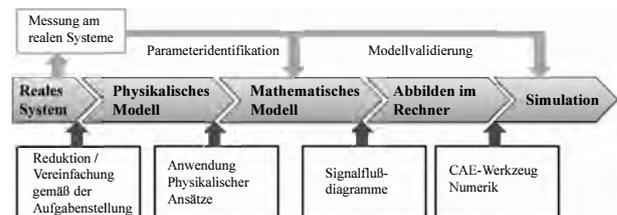


Abbildung 2: Modellbildungsprozess

Der Modellbildungsprozess umfasst zudem Messungen am realen System, um zum einen die Parameter des mathematischen Modells zu identifizieren und zum anderen die Simulation zu validieren.

2.1 Beschreibung der geometrischen Abrollbedingungen

Die essentiell zur Berechnung notwendige kartesische Beschreibung der realen Oberfläche der Mecanum-Radtonne ergibt sich aus den Abrollbedingungen des Rades auf der Kugel.

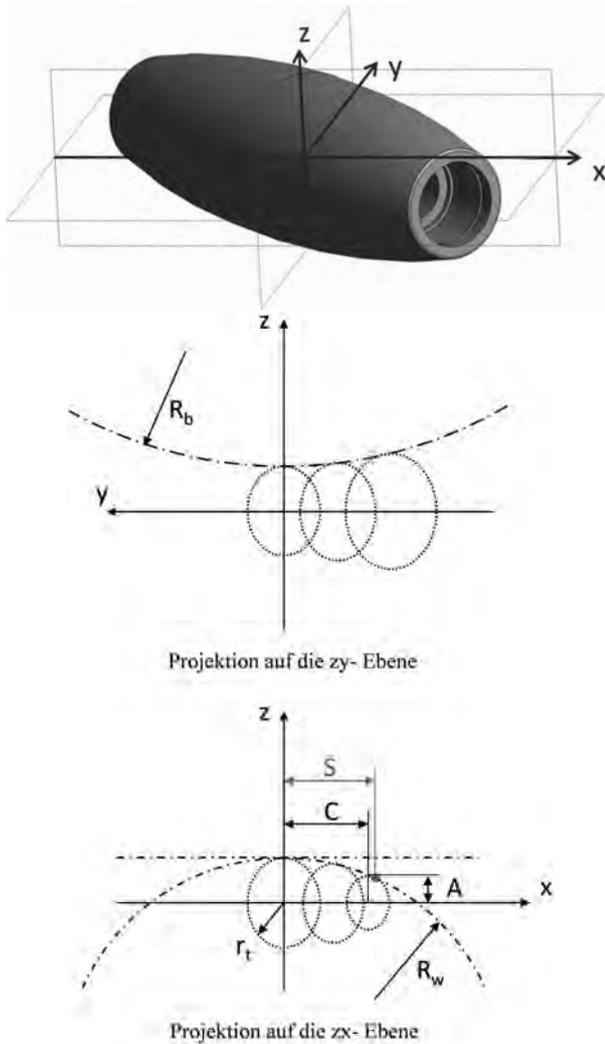


Abbildung 3: notwendigen Projektionen der Mecanum-Radtonne

Um eine ruhiges und gleichmäßiges Abrollen zu ermöglichen wurde bereits in [4] ein geometrischer Zusammenhang zwischen dem axialen und radialen Krümmungsverlauf der Tonne zu dem Radius der Antriebskugel R_b und dem Schnittradius des Mecanum-Rades r_t über eine Hilfsgröße S errechnet. Diese Hilfsgröße S beschreibt wie in Abbil-

dung 3 zu sehen den idealen Kontaktpunkt zwischen Kugel und Radtonne. An diesem Punkt liegen die approximierten Oberflächengeometrien der Antriebskugel, des (virtuellen) Umfangs des Mecanum-Rades R_w und des Radius der Mecanum Tonne r_t als auch die Ableitungsfunktionen der Oberflächengeometrie übereinander. Die geschlossenen dreidimensionale Oberfläche entsteht durch Drehung mit dem Winkel β . Der folgende formale Zusammenhang gilt entsprechend für die Kontur der auf einer Kugel abrollenden Tonne in radialer und axialer Richtung.

$$\underline{\Xi}(S, \beta) = \begin{bmatrix} x_S \\ y_b \\ z_b \end{bmatrix} \quad (1)$$

$$= \begin{bmatrix} S \cdot \sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot ((R_A - (R_w - r_t)) \cdot \frac{-S}{R_A}) \\ y_s \cdot \sin \beta + z_s \cdot \cos \beta \\ y_s \cdot \cos \beta + z_s \cdot \sin \beta \end{bmatrix}$$

Mit dem Hilfskoordinatensystem:

$$y_s = \sqrt{(R_A - (R_w - r_t))^2 + 2 \cdot \left(\frac{1}{2} (R_A - (R_w - r_t)) \cdot \frac{-S}{R_A} \right)^2}$$

$$z_s = \left(R_b - \sqrt{R_b^2 - \left(S + \frac{1}{2} (R_A - (R_w - r_t)) \cdot \frac{-S}{R_A} \right)^2} \right)$$

bezogen auf den absoluten Abstand:

$$R_A = \sqrt{R_w^2 - S^2}$$

Die gefundenen Gleichungen sind allgemein für Mecanum-Räder jeglicher Gestalt, sowohl auf sphärischen als auch planaren Flächen (als Sonderfall mit unendlich großem Radius) abrollend, gültig. Nachfolgend sind in Tabelle 1 die für den hier vorgestellten Anwendungsfall genutzten Parameter aufgelistet.

Tabelle 1: Parameter der Versuchsträger

Par	Bedeutung	S-Mob.	AGV
R_w	abs. Radradius	60 mm	60 mm
r_t	max. Tonnenradius	13 mm	13 mm
R_b	Radius Sphaere	236 mm	∞

Mit diesen ergeben sich die in der folgenden Abbildung 4 gezeigten Ergebnisse für die Oberflächenkontur und den Verlauf der Oberflächenkrümmung über die

Längsachse der Radtonne. Ein ausführlicher Vergleich ist in Kapitel 4 zu finden.

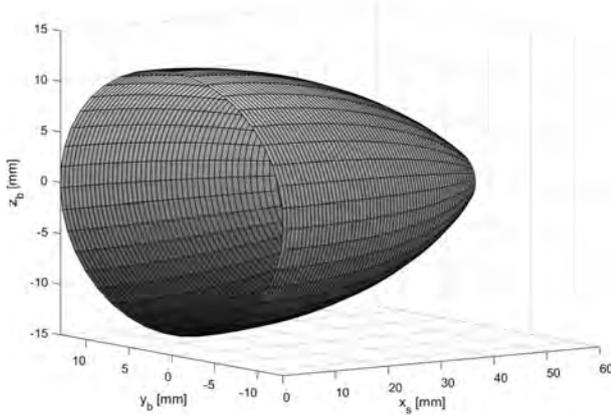


Abbildung 4: Oberflächenkrümmung über die Längsachse der Radtonne

2.2 Herleitung der Kontaktgeometrie

Um die Kontaktverhältnisse der beiden interagierenden Oberflächen herzuleiten, bietet es sich an diese im Vektorraum abzubilden, um die komplexen geometrischen Funktion über differentialgeometrische Methoden zugänglich zu machen. Dazu ist notwendig zunächst das Einheitsnormalenvektorfeld \vec{n} der Oberflächengeometrie Ξ herzuleiten. Aus der Differentialgeometrie folgt:

$$\vec{n}(S, \beta) = \frac{\frac{\partial \Xi(S, \beta)}{\partial S} \times \frac{\partial \Xi(S, \beta)}{\partial \beta}}{\left| \frac{\partial \Xi(S, \beta)}{\partial S} \times \frac{\partial \Xi(S, \beta)}{\partial \beta} \right|} \quad (2)$$

Aus den partiellen Differentialen ergeben sich die erste Fundamentalform I_p welche die innere Geometrie der Fläche beschreibt:

$$I_p(S, \beta) = \begin{bmatrix} \mathfrak{E}(S, \beta) & \mathfrak{F}(S, \beta) \\ \mathfrak{F}(S, \beta) & \mathfrak{G}(S, \beta) \end{bmatrix} \quad (3)$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{\partial \Xi(S, \beta)}{\partial S} \cdot \frac{\partial \Xi(S, \beta)}{\partial S} & \frac{\partial \Xi(S, \beta)}{\partial S} \cdot \frac{\partial \Xi(S, \beta)}{\partial \beta} \\ \frac{\partial \Xi(S, \beta)}{\partial S} \cdot \frac{\partial \Xi(S, \beta)}{\partial \beta} & \frac{\partial \Xi(S, \beta)}{\partial \beta} \cdot \frac{\partial \Xi(S, \beta)}{\partial \beta} \end{bmatrix}$$

sowie die zweite Fundamentalform II_p der Oberflächengeometrie welche direkt aus partiellen Ableitungsfunktionen der ersten Fundamentalform

sowie dem Einheitsnormalenvektorfeld hervorgeht:

$$II_p(S, \beta) = \begin{bmatrix} \mathfrak{L}(S, \beta) & \mathfrak{M}(S, \beta) \\ \mathfrak{M}(S, \beta) & \mathfrak{N}(S, \beta) \end{bmatrix} \quad (4)$$

$$= \begin{bmatrix} \vec{n}(S, \beta) \cdot \frac{\partial^2 \Xi(S, \beta)}{\partial S \cdot \partial S} & \vec{n}(S, \beta) \cdot \frac{\partial^2 \Xi(S, \beta)}{\partial S \cdot \partial \beta} \\ \vec{n}(S, \beta) \cdot \frac{\partial^2 \Xi(S, \beta)}{\partial S \cdot \partial \beta} & \vec{n}(S, \beta) \cdot \frac{\partial^2 \Xi(S, \beta)}{\partial \beta \cdot \partial \beta} \end{bmatrix}$$

Über eine einfache Division der zweiten Fundamentalform mit der ersten erhält man die negative Weingartenabbildung der Fläche.

$$L_p(S, \beta) = I_p(S, \beta)^{-1} \cdot II_p(S, \beta) \quad (5)$$

$$= \frac{1}{\mathfrak{E} \cdot \mathfrak{G} - \mathfrak{F}^2} \begin{bmatrix} \mathfrak{L} \cdot \mathfrak{G} - \mathfrak{M} \cdot \mathfrak{F} & \mathfrak{M} \cdot \mathfrak{G} - \mathfrak{N} \cdot \mathfrak{F} \\ \mathfrak{M} \cdot \mathfrak{E} - \mathfrak{L} \cdot \mathfrak{F} & \mathfrak{N} \cdot \mathfrak{E} - \mathfrak{M} \cdot \mathfrak{F} \end{bmatrix}$$

Diese selbstadjungierte lineare Vektorraumabbildung des dreidimensionalen Raumes ist diagonalisierbar, d.h. es gibt eine Basis aus Eigenvektoren und somit Eigenwerte [7]. Berechnet man nun die Eigenwerte dieser Matrix, so ergeben diese, aus den Grundlagen der differentiellen Geometrie ersichtlich, die Krümmungen in Richtung der beiden Raumparameter. Da die Hauptkrümmungen die Kehrwerte der Radien an einer Stelle sind, lässt sich die Hypothese durch Umrechnung und Vergleich überprüfen. Das Vorzeichen folgt der Nomenklatur der Gauß'schen Differentialgeometrie:

$$\underline{\Xi}_2(S, \beta) = \begin{bmatrix} \rho_{21}(S, \beta) \\ \rho_{22}(S, \beta) \end{bmatrix} = \det(L_p(S, \beta) - \lambda I_n) \quad (6)$$

Eine Anwendung auf ein Mecanum-Rad ist indes nicht bekannt, weshalb hier über eine zweite Methode, der Kreissegmentnäherung in Abbildung 5, der Anwendungsfall validiert werden soll. Die Krümmung kann

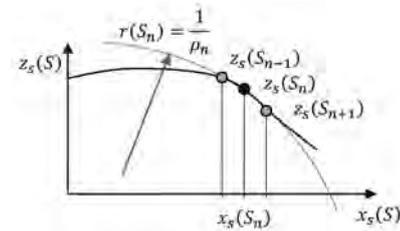


Abbildung 5: Kreissegmentnäherung

allgemein über ein Kreissegment mit einem konstanten Radius und dem einfachen Zusammenhang über folgen-

des Gleichungssystem hergeleitet werden:

$$a_1 - x_n(S_{n-1}) \cdot a_2 - z_s(S_{n-1}) \cdot a_3 = x_s(S_{n-1})^2 + z_s(S_{n-1})^2$$

$$a_1 - x_n(S_n) \cdot a_2 - z_s(S_n) \cdot a_3 = x_s(S_n)^2 + z_s(S_n)^2$$

$$a_1 - x_n(S_{n+1}) \cdot a_2 - z_s(S_{n+1}) \cdot a_3 = x_s(S_{n+1})^2 + z_s(S_{n+1})^2$$

In Matrixschreibweise dargestellt als lineare Funktion ergibt sich:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -x_n(S_{n-1}) & -z_s(S_{n-1}) \\ 1 & -x_n(S_n) & -z_s(S_n) \\ 1 & -x_n(S_{n+1}) & -z_s(S_{n+1}) \end{bmatrix}}_{\underline{m}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}}_{\underline{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} x_s(S_{n-1})^2 + z_s(S_{n-1})^2 \\ x_s(S_n)^2 + z_s(S_n)^2 \\ x_s(S_{n+1})^2 + z_s(S_{n+1})^2 \end{bmatrix}}_{=\underline{b}} \quad (7)$$

Ansatz wäre nun die Kontur in diskreten Teilstücken, wie in Abbildung 5 dargestellt über Kreissegmente zu nähern und so die Krümmungen an den Diskretisierungspunkten zu errechnen. Diese wären einfach über

$$\underline{x} = \underline{m}^{-1} \cdot \underline{b} \quad (8)$$

zu bestimmen. Ein Vergleich beider Methoden zeigt in Abbildung 10 des Kapitels 4 das die Weingarten Abbildung mit der Methode der diskreten Kreissegmentnäherung sehr gut übereinstimmt, weshalb diese für die weitere Betrachtung des Problems genutzt werden soll.

2.3 Hertz'sche Pressung im Kraftübertragungselement

Laut Originalveröffentlichung Heinrich Hertz [8] ergibt sich die Pressung in einem Kontaktpunkt zweier Bauteile über dessen gegenseitige Einwölbung der Oberfläche in Form von Verformungsellipsen. Diese Verformung ist neben den Materialeigenschaften (siehe Tabelle 2) stark abhängig von der jeweiligen Krümmung der beiden Oberflächenpaare am Kontaktpunkt. Während die Krümmungsverläufe bei gleichmäßig geformten Oberflächen, wie einer Kugel, durch Invertierung der Radien zu berechnen sind, ist diese bei den betrachteten Oberflächen der Mecanum- Räder nur über die im vorherigen Kapitel vorgestellte Vektorraumdarstellung zugänglich.

Der Ersatzfaktor W_{ers} errechnet sich als quasi Durchschnitt der Materialeigenschaften der Paarung,

Tabelle 2: Materialeigenschaften der Mecanum Räder

Par	Bedeutung	S-Mobile	AGV
F_N	Normalkraft	976 N	976 N
E_1	E-Modul Rad	210 Pa	5 Pa
E_2	E-Modul Grund	13 Pa	30 Pa
ν	Poison Zahl	0,3	0,3

falls diese aus unterschiedlichen Materialien bestehen. In dem hier vorliegenden Fall wird über

$$W_{ers} = \frac{1}{2} \left(\frac{1 - \nu^2}{E_1} + \frac{1 - \nu^2}{E_2} \right) \quad (9)$$

errechnet wie die Paarung zum einen beim S-Mobile aus stählernem Mecanum- Rad und GFK- Kugel und zum anderen beim AGV aus gummierten Radtonnen und Beton- Hallenboden zusammenwirken. Die folgende Abbildung 6 zeigt die ideelle Verformungsellipse mit Randpunkt $P(x|y)$ und ihren Halbachsen d und e .

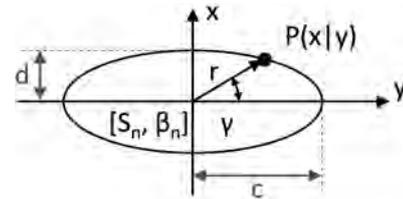


Abbildung 6: Verformungsellipse mit Halbachsen

$$P(x|y) = \begin{bmatrix} x_s(S, \beta) + c(S, \beta) \cdot \cos(\gamma) - d(S, \beta) \cdot \sin(\gamma) \\ y_b(S, \beta) + c(S, \beta) \cdot \sin(\gamma) + d(S, \beta) \cdot \cos(\gamma) \end{bmatrix}$$

Die Halbachsen ergeben sich nach Hertz zu:

$$c(S, \beta) = \zeta \cdot \sqrt[3]{\frac{3 \cdot F_N \cdot W_{ers}}{\sum \rho(S, \beta)}} \quad (10)$$

$$d(S, \beta) = \eta \cdot \sqrt[3]{\frac{3 \cdot F_N \cdot W_{ers}}{\sum \rho(S, \beta)}} \quad (11)$$

Die Verformungsellipse ist also neben den Materialeigenschaften auch von den Krümmungen ρ und zwei Beiwerten ζ und η abhängig. Die Krümmungen gehen

dabei über die Krümmungssumme

$$\begin{aligned} \sum \rho(S, \beta) &= \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \rho_{ij} \\ &= \rho_{11} + \rho_{12} + \rho_{21}(S, \beta) + \rho_{22}(S, \beta) \end{aligned} \quad (12)$$

in die Gleichung ein. Dies entspricht bei Krümmungsdifferenzbetrachtung über beide Kontaktflächen in den jeweiligen projizierten zweidimensionalen Raumrichtungen der Krümmungsdifferenz $F(\rho)$

Die beiden Beiwerte ergeben sich anhand flacher Geometrie nach:

$$\zeta(S, \beta) = \sqrt[3]{\frac{t \cdot E(t) - t^3 \cdot K(t)}{\frac{\pi}{4}(1-t^2) \cdot (1+F(\rho))}} \quad (13)$$

$$\eta(S, \beta) = \sqrt[3]{\frac{K(t) - E(t)}{\frac{\pi}{4}(1-t^2) \cdot (1+F(\rho))}} \quad (14)$$

Diese sind wie ersichtlich nur durch das Lösen der elliptischen Integral 1. und 2. Ordnung zu berechnen. Diese sind aufgrund ihrer nicht-Darstellbarkeit durch elementare Funktionen und dem damit nötigen iterativen rekursiven Lösungsverfahren nicht direkt lösbar. Sie können zum einen über Korrespondenztabelle nach Legendre bestimmt werden, welche aus der Legendre-Form derselben hergeleitet wurden. Zum anderen wurden in [9] algebraische Näherungsfunktionen welche ohne Iterationen zu einer Näherungslösung führen. Hier sollen die elliptischen Integrale aber direkt über den Explizitätsratio t gelöst werden.

$$K(t) = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{1 - (1-t^2)\sin^2 \phi}} dx \quad (15)$$

$$E(t) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - (1-t^2)\sin^2 \phi} dx \quad (16)$$

Mit dem Explizitätsratio:

$$t(S, \beta) \equiv \frac{c(S, \beta)}{d(S, \beta)} = \frac{\zeta(S, \beta)}{\eta(S, \beta)} \leq 1 \quad (17)$$

Da dieser, wie nun ersichtlich ist, aus den eigentlich erst noch zu berechnenden Beiwerten bzw. Halbachsen gebildet werden muss, ist eine explizite Berechnung nicht möglich. Die Gleichungen müssen numerisch iterativ gelöst werden. Dazu ist es notwendig eine Abbruchbedingung zu definieren. Die folgende Abbildung 7 zeigt den Iterativen Prozess.

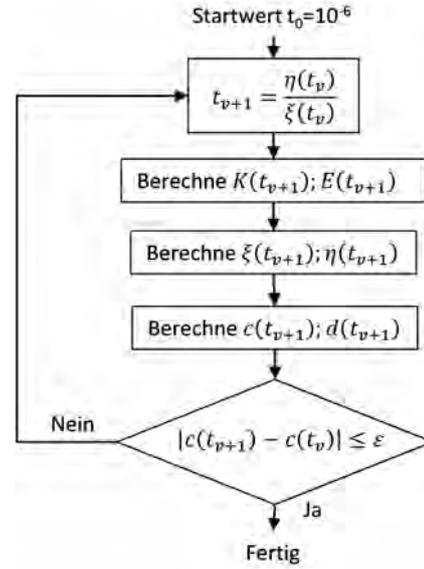


Abbildung 7: Flussdiagramm (PAP) der Berechnungsmethode

Mit Hilfe der nun vorliegenden Krümmungswerte kann die Druckverteilung im inneren der Kontaktflächen berechnet werden.

$$p_h = p_m(S, \beta) \sqrt{1 - \left(\frac{x}{d(S, \beta)}\right)^2 - \left(\frac{y}{c(S, \beta)}\right)^2} \quad (18)$$

Der Maximale Druck, der materialschädigend wirken kann sollte er den Grenzwert überschreiten, ergibt sich immer im Achsenmittelpunkt der Ellipse bei $x = y = 0$ und errechnet sich zu:

$$\begin{aligned} p_m(S, \beta) &= \frac{3 \cdot F_n}{2\pi \cdot c(S, \beta) \cdot d(S, \beta)} \\ &= \frac{3 \cdot F_n}{2\pi \cdot \zeta(S, \beta) \cdot \eta(S, \beta) \cdot \left(\frac{3 \cdot F_n \cdot W_{ers}}{\sum \rho(S, \beta)}\right)^{2/3}} \\ &= \frac{F_n}{\pi \cdot \zeta(S, \beta) \cdot \eta(S, \beta)} \sqrt{\left(\frac{3 \cdot F_n \cdot \sum \rho(S, \beta)^2}{8 \cdot W_{ers}^2}\right)} \end{aligned} \quad (19)$$

Aus diesen Erkenntnissen lassen sich nun Aussagen über die Reibung zwischen der Paarung treffen.

2.4 Herleitung der Kraftübertragungsverhältnisse

Nach den allgemeinen Untersuchungen der Materialwissenschaften zum Reibverhalten von Stoffen

wie in [10] besteht ein nicht-linearer Zusammenhang zwischen der untersuchten Hertz'schen Pressung im Kontaktpunkten des Reibpaares, der Relativgeschwindigkeit der zueinander bewegten Flächen und einem resultierenden Reibkoeffizienten. Nachfolgend ist dieser Zusammenhang wie gefunden in 8 dargestellt.

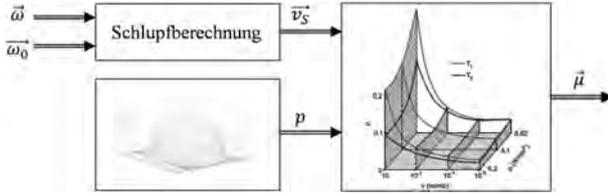


Abbildung 8: Reibkoeffizient aus Pressung und Relativgeschwindigkeit

Es ist nun möglich über eine Näherungsfunktion oder eine Look-Up Tabelle diesen Zusammenhang sowohl im Modell als auch als Inverse in einer Reibkompensation den Reibungseinfluss zu verarbeiten.

$$\underline{\mu} = f(v_s(\omega, \omega_0), p_m(S, \beta)) \quad (20)$$

Weiterhin kann dies auch zur Optimierung genutzt werden um die Konstruktive Gestaltung des Mecanum-Rades unter Berücksichtigung der Kugelgeometrie zu optimieren. Das hier verfolgte Optimierungsziel ist die Nicht-Linearität zu linearisieren und somit den Berechnungsaufwand der Reibkompensation zu senken und gleichzeitig dessen Gültigkeitsbereich auszuweiten ohne einen Verlust an Genauigkeit hinnehmen zu müssen. Im Kapitel 4 ist das Optimierungsergebnis dargestellt.

3 Integration zu Dynamikmodell

Auf Basis der Kinematik und Dynamik des jeweiligen zu modellierenden System sollen die Dynamikfunktionen in Form von verkoppelten, nicht-linearen Differentialgleichungen hergeleitet werden. Ein Bereits in [11] für das S-Mobile auf Basis des Euler-Lagrange Ansatzes hergeleitetes Dynamikmodell wurde in die allgemeine Matrixschreibweise überführt und für die Modellierung der Kraftübertragungsverhältnisse nach dem hier gezeigten Ansatz erweitert. Die nachfolgende Gleichung zeigt das darauf basierende, verallgemein-

erte Dynamikmodell mit Reibmodellierung zur Berücksichtigung der Kraftübertragung.

$$\underline{M}(\underline{q}) \cdot \ddot{\underline{q}} + \underline{C}(\underline{q}, \dot{\underline{q}}) \cdot \dot{\underline{q}} + \underline{G}(\underline{q}) = \underline{Q}(\underline{q}) \cdot \underline{u} \quad (21)$$

Der Eingangsvektor \underline{u} wird über eine Minimalbedingung jedes einzelnen Vektorelements i definiert, sodass entweder die volle Antriebskraft \underline{u} oder aber die reduzierte, maximal übertragbare Kraft $\underline{\tau}$ in das Modell weitergeleitet wird.

$$\forall (u_i, \tau_i) \in (\underline{u} | \underline{\tau}) :$$

$$\underline{u} = \min_{i=1 \dots n} [u_i, \tau_i] = \begin{cases} \underline{u}(i) & u_i \leq \tau_i \\ \underline{\tau}(i) & u_i > \tau_i \end{cases} \quad (22)$$

Der Kraftübertragungsvektor $\underline{\tau}$ bildet sich aus den Anpresskräften \underline{F}_N und dem Reibbeiwertsvektor $\underline{\mu}$. Es soll hierbei beachtet werden, dass durch mechanische Vorspannung der Räder die Anpresskräfte einstellbar und unabhängig von der Kinematik des Systems sein können.

$$\underline{\tau} = \underline{F}_N \cdot \underline{\mu} \quad (23)$$

Die folgenden Abbildung 9 zeigt die allgemeine Struktur des Dynamikmodells der Strecke. Dieses Modell besitzt die Eingänge:

- $\underline{u} \in \mathbb{R}^n$ Krafteingangsvektor
- $\underline{p} \in \mathbb{R}^n$ Vektor der Pressungen

die Zustandsvektoren:

- $\underline{q} \in \mathbb{R}^m$ Zustandsvektor
- $\underline{v}_s \in \mathbb{R}^n$ Schlupfvektor
- $\underline{\tau} \in \mathbb{R}^n$ Kraftübertragungsvektor

und die charakterisierenden Matrizen und Vektoren:

- $\underline{M} \in \mathbb{R}^{m \times m}$ Massenmatrix
- $\underline{C} \in \mathbb{R}^{m \times m}$ Coriolis- oder Zentrifugalkraftmatrix
- $\underline{G} \in \mathbb{R}^{m \times m}$ Gravitationsmatrix
- $\underline{V} \in \mathbb{R}^{m \times m}$ Matrize der Geschwindigkeitsvektoren
- $\underline{Q} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ Eingangsmatrix der eingprägten Kräfte

Durch den neu geschaffenen Eingang über den die Pressung am Kontaktpunkt in das Modell extern eingeleitet und den Zugang über die Matrize der

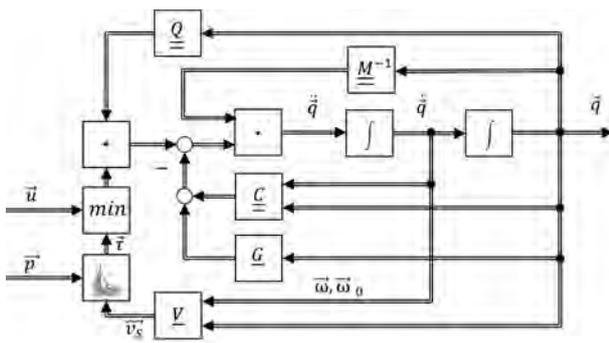


Abbildung 9: Modell der Strecke

Geschwindigkeitsvektoren mit der dieser Eingang am Modell angekoppelt wird, ist es nun möglich online eine veränderliche Reibung zu modellieren und simulieren.

4 Validierung

Abschließend sollen die Simulationsergebnisse analysiert und validiert werden. Dazu werden zunächst die geometrischen Oberflächeneigenschaften auf Plausibilität überprüft. In der Abbildung 10 sind die in

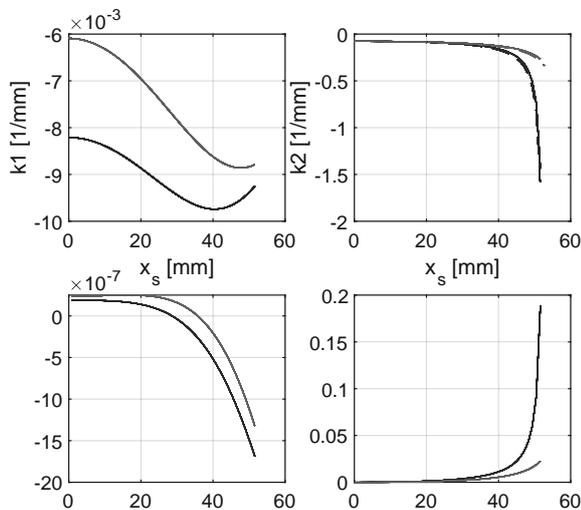


Abbildung 10: Krümmungsverläufe der Oberflächen der Mecanum- Räder an S-Mobile und AGV

Kapitel 2.2, auf Basis der in [4] hergeleiteten Verläufe der Oberflächenkontur, gefundenen Krümmungsverläufe dargestellt. der Blaue Verlauf bezieht sich auf die Radtonne des AGV, der rote Verlauf auf die Radtonne

des S-Mobile. Es sind jeweils die Krümmungsverläufe in die jeweiligen Achsenrichtungen des in 3 dargestellten Koordinatensystems als k_1 und k_2 über x_s verlaufend dargestellt. Dabei sind die durchgezogenen Verläufe mittels der differentialgeometrischer Methode (Eigenwerte der Weingartenabbildung) und die gestrichelten Verläufe mit der Kreissegmentnäherung errechnet worden. Jeweils darunter ist die Abweichung beider Methoden zueinander dargestellt. Es ist ersichtlich das diese in einem akzeptablen Bereich liegen. Da k_1 über den Umfang der Tonne in y_b Koordinatenrichtung liegt, nähert die Kreisnäherung entsprechend sehr gut an, die Abweichungen sind prozentual gering. Über k_2 ist zu sehen das eine größere prozentuale Abweichung vorhanden ist, die Näherung ist nur beschränkt gültig.

5 Zusammenfassung und Fazit

Im vorliegenden Beitrag wurden zunächst geometrische Untersuchungen zum Abrollverhalten von Mecanum-Rädern am Beispiel der beiden Forschungsträger AGV und S-Mobile durchgeführt. Auf Basis dieser wurden die Kraftübertragungsverhältnisse hergeleitet und gezeigt wie das Reibverhalten in ein mehrdimensionales, nicht-lineares mathematisches Modell eingebaut werden kann. Es wurden gezeigt das der hergeleitete Ansatz mit einem üblichen Näherungsverfahren approximiert werden konnte und somit Gültigkeit hat. Das aufgezeigte Verfahren kann als allgemeingültige Methode zur Auslegung von Mecanum-Rädern jeder Art gewertet werden. Weiterhin ist es als Grundlage allgemeiner Untersuchungen von Reibpaarungen und deren Integration in mathematische Simulationsmodelle geeignet.

Acknowledgement

Der vorliegende Beitrag wurde im Rahmen des Verbundprojektes MiMec als Teil des Verbundprojekts Synus unter dem Förderkennzeichen ZW6-85012454 gefördert. Die Verantwortung für den Inhalt liegt bei den Autoren. Für die Förderung bedanken sich diese herzlichst.



References

- [1] Ilon BE. Wheels for a course stable selfpropelling vehicle movable in any desired direction on the ground or some other base. 13.11.1972.
- [2] Connette C. *Kinematische Modellierung und Regelung omnidirektionaler, nicht-holonomer Fahrwerke*. Zugl.: Stuttgart, universität stuttgart, diss., 2013, Universitätsbibliothek der Universität Stuttgart, Stuttgart. 2013.
- [3] Siegwart R, Nourbakhsh IR. *Introduction to autonomous mobile robots*. Intelligent robotics and autonomous agents. Cambridge, Mass: MIT Press. 2004.
- [4] Göllner M, Liu-Henke X. Mathematical derivation of the geometry of a Mecanum-wheel for a size exact roll off on a spherical surface. In: *Mechatronic systems and materials 2014*, Herausgegeben durch Pawliczek R, Robak G. Opole: Opole University of Technology Faculty of Mechanical Engineering Department of Mechanics and Machine Design. 2015;.
- [5] Harris TA, Kotzalas MN. *Rolling bearing analysis*. Boca Raton, Fla.: CRC, Taylor & Francis, 5th Ausg. 2007.
- [6] Boresi AP, Schmidt RJ. *Advanced mechanics of materials*. New York, NY: Wiley, 6th Ausg. 2003.
- [7] Eschenburg JH, Jost J. *Differentialgeometrie und Minimalflächen*. Springer-Lehrbuch Masterclass. Berlin: Springer Spektrum, 3rd Ausg. 2014.
- [8] Hertz H. Über die Berührung fester elastischer Körper. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*. 1881;(92):156–171.
- [9] Brewe DE, Hamrock BJ. Simplified solution for point contact deformation between two elastic solids. 1976;.
- [10] Popov VL. *Kontaktmechanik und Reibung: Ein Lehr- und Anwendungsbuch von der Nanotribologie bis zur numerischen Simulation*. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg. 2009.
- [11] Liu-Henke X, Göllner M, Tao H. An intelligent control structure for highly dynamic driving of a spherical electrical drive. In: *2017 Twelfth International Conference on Ecological Vehicles and Renewable Energies (EVER)*. Piscataway, NJ: IEEE. 2017; pp. 1–10.