

# Anwendung des Pontryaginschen Maximumprinzips zur Verbrauchsreduzierung am Beispiel eines Parallel-Hybridfahrzeugs

Thomas Böhme, IAV GmbH

dr.thomas.boehme@iav.de

Heiko Rabba, IAV GmbH

heiko.rabba@iav.de

## Zusammenfassung

Hybrid-Fahrzeuge verbessern den Wirkungsgrad des Antriebsstrangs mit dem Hinzufügen einer oder mehrerer E-Maschine(n) und evtl. Schaltelementen. Die somit hinzugekommenen Freiheitsgrade bieten das Potenzial für Verbrauchsreduzierungen und erhöhen gleichzeitig den Applikationsaufwand enorm. In diesem Beitrag wird aufgezeigt, wie die Verbrauchsoptimierung beim Parallelhybriden als Optimalsteuerungsproblem aufgefasst werden kann. Mit Simulationsmodellen und dem Pontryaginschen Maximumprinzip wird eine leistungsfähige, systematische Applikationsmethodik geschaffen. Simulationsergebnisse zeigen die Effektivität dieser Applikationsmethodik für die Verbrauchsoptimierung eines Serien-Hybridfahrzeuges im „Neuen Europäischen Fahrzyklus“ (NEFZ) auf.

## 1 Motivation

Das Energiesparen ist im Bewusstsein der Menschen angekommen. Dies ist nicht nur ein kurzfristiger Trend, sondern mittlerweile eine große Bewegung und für viele bereits eine Lebenseinstellung. Darüber hinaus gibt es immer strengere politische Auflagen, die zum Schutz der Umwelt beitragen sollen. Hierdurch steigen das Interesse und die Nachfrage der Konsumenten nach umweltfreundlichen Fahrzeugen mit geringerem Verbrauchs- und Emissionsverhalten an. Aus diesem Grund richtet die Automobilindustrie den Fokus immer mehr auf alternative Antriebsmöglichkeiten. Eine davon ist die Hybridtechnik. Energiesparen mit Hybridfahrzeugen benötigt nicht nur die richtige Dimensionierung der Komponenten, sondern setzt auch an die Steuer- und Regelstrategien neue Anforderungen. So wurden in der Vergangenheit z.B. regelbasierte Verfahren aufgrund ihrer Einfachheit häufig in Hybridfahrzeugen eingesetzt [1]. Die Steuer- und Regelstrategien in der heutigen Entwicklung sind weitaus effektiver und verwenden nicht nur Informationen aus der

Vergangenheit, sondern präzisieren das Handeln mit Hilfe von Navigationssystemen und GPS-Informationen [2]. Dennoch müssen auch heutige Steuer- und Regelstrategien für Hybridfahrzeuge den höheren Anforderungen in Punkto "Verbrauchseffizienz" nachkommen. Das erfordert ein neues Vorgehen in der Applikation der Systeme. So wird nicht selten im Laufe eines Projektes die Frage "wie weit ist die bestehende Lösung vom Optimum entfernt" gestellt. Nicht ohne Grund wurde in den letzten Jahren das Thema "Optimalsteuerungstheorie" aus verschiedenen Blickwinkeln, wie z.B. der Dynamischen Programmierung (DP) [3] und der Stochastischen Dynamischen Programmierung (SDP) [4], beleuchtet. Eine Renaissance erlebte vor kurzem die Variationsrechnung für Optimalsteuerungsprobleme und speziell das Pontryaginsche Maximumprinzip (PMP) [5].

In Abbildung 1 ist ein typischer Applikationsprozess für ein Serien-Fahrzeug abstrahiert dargestellt. In allen wesentlichen Applikationsphasen besteht die Notwendigkeit für ein geeignetes Optimierungsverfahren. Dies bildet die Grundlage für den PMP-Einsatz.

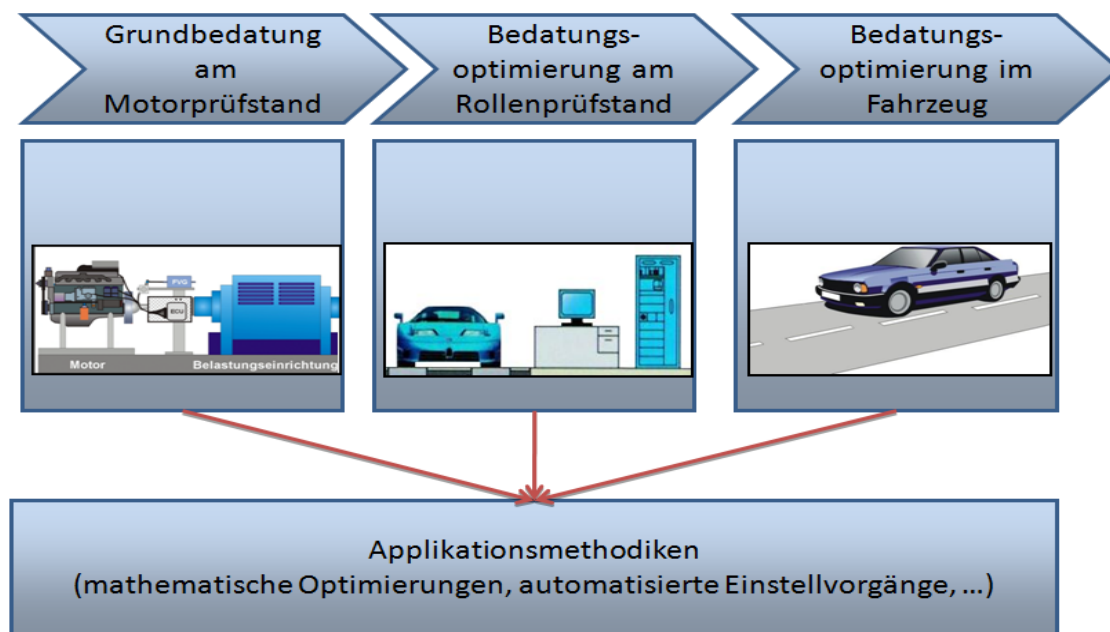


Abbildung 1: Typischer Applikationsprozess für eine Serien-Bedatung

## 2 Fahrzeugmodell

Grundlage für das PMP-Verfahren ist eine mathematische Beschreibung des Problems in Form eines Parallelhybrid-Fahrzeugmodells. In den folgenden Abschnitten wird das Fahrzeugmodell abstrahiert dargestellt. Es beinhaltet den Leistungsfluss im Antriebsstrang, die Hybrid-Betriebsstrategie und das E-Maschinen- bzw. Batteriemodell. Alle physikalischen Größen sind in SI-Einheiten.

### 2.1 Leistungsfluss im Hybridfahrzeug

Um den Bewegungszustand des Fahrzeuges zu ändern, wird die Antriebskraft  $F_A$  benötigt. Sie zeigt in die Bewegungsrichtung und ihr wirken die Fahrwiderstandskräfte entgegen. Unter den Fahrwiderständen versteht man die Summe der Kräfte, bestehend aus dem

Beschleunigungswiderstand  $F_B$ , dem Luftwiderstand  $F_L$ , dem Rollwiderstand  $F_R$  und dem Steigungswiderstand  $F_{St}$  des Fahrzeugs.

$$F_A = F_B + F_L + F_R + F_{St} \quad (1)$$

mit

$$F_L = C_W \cdot A \cdot \frac{\rho_L}{2} \cdot \dot{x}^2 \quad (2)$$

$$F_R = f_R \cdot m_{Fzg} \cdot g \quad (3)$$

$$F_{St} = m_{Fzg} \cdot g \cdot \sin \alpha \quad (4)$$

$$F_B = m_T \cdot \ddot{x}, \quad (5)$$

wobei  $C_W$  der Luftwiderstandsbeiwert [-],  $A$  die projizierte Stirnfläche des Fahrzeugs in  $[m^2]$ ,  $\rho_L$  die Luftdichte in  $[kg/m^3]$ ,  $f_R$  der Rollwiderstandskoeffizient [-],  $m_{Fzg}$  die Fahrzeugmasse in  $[kg]$ ,  $g$  die Erdbeschleunigung in  $[m/s^2]$ ,  $\alpha$  der Steigungswinkel in  $[rad]$ ,  $\dot{x}$  die Fahrzeuggeschwindigkeit in  $[m/s]$  und  $\ddot{x}$  die Fahrzeugbeschleunigung in  $[m/s^2]$  sind.

Der Beschleunigungswiderstand  $F_B$  enthält die translatorische Beschleunigung der Masse sowie die rotatorische Beschleunigung der sich drehenden Teile. Beide Massenwirkungen können mit einer einfachen Ersatzmasse

$$m_T = m_{Fzg} + \frac{J_{ges}}{r^2} \quad (6)$$

beschrieben werden, wobei  $J_{ges}$  die Trägheit aller rotierenden Teile in  $[kg/m^2]$  und  $r$  der statische Reifenhalbdurchmesser in  $[m]$  sind.

Die Bewegungsgleichung wird unter Einbeziehung der Antriebskraft entwickelt:

$$\ddot{x} = \frac{F_A}{m^T} - \frac{C_W \cdot A \cdot \rho_L}{2 \cdot m^T} \dot{x}^2 - \frac{f_R \cdot m_{Fzg} \cdot g}{m^T} - \frac{m_{Fzg} \cdot g \cdot \sin(\alpha)}{m^T}. \quad (7)$$

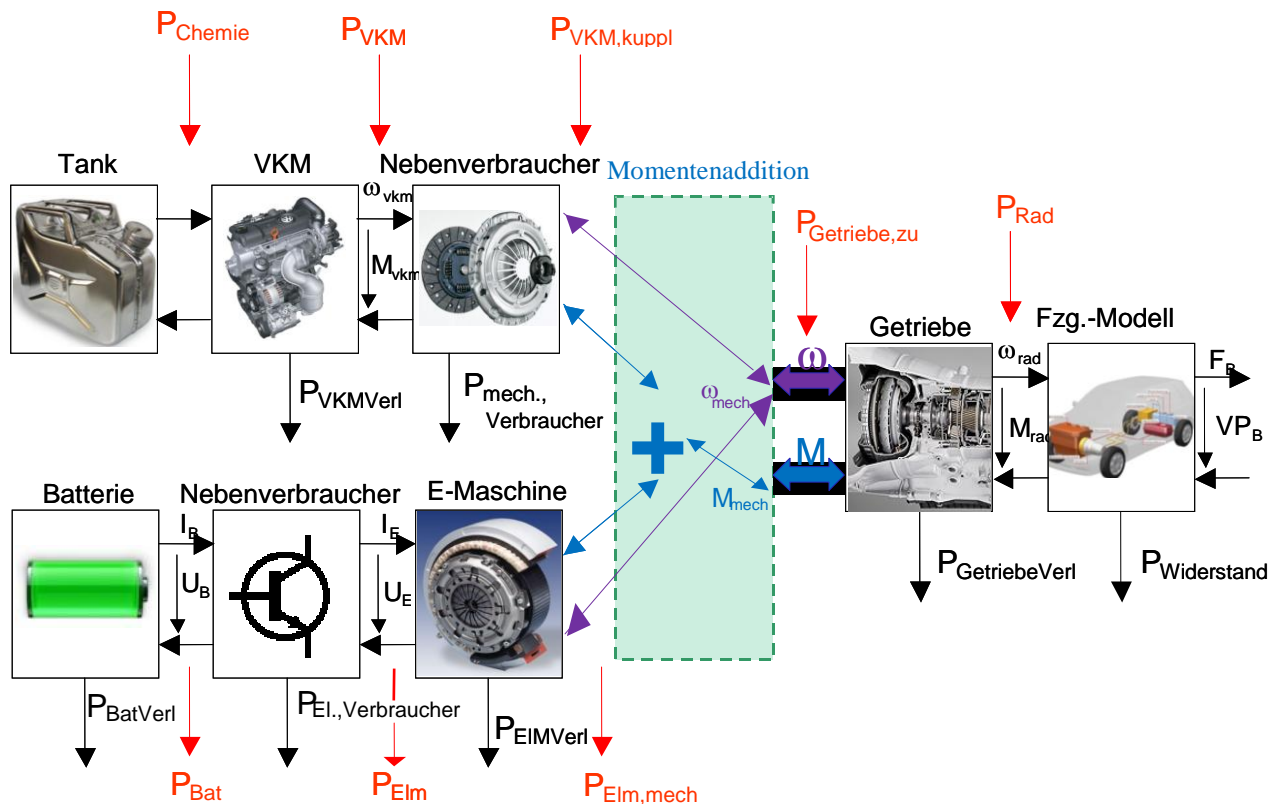


Abbildung 2: Topologie des Simulationsmodells eines Parallelhybriden

Die Radleistung als wichtige Schnittstelle zur Betriebsstrategie ist

$$P_{Rad} = \left( m_T \cdot \ddot{x} + 0.5 \cdot C_W \cdot A \cdot \rho_L \cdot \dot{x}^2 + f_R \cdot m_{Fzg} \cdot g + m_{Fzg} \cdot g \cdot \sin(\alpha) \right) \dot{x} \quad (8)$$

Die benötigte Radleistung wird durch ein Fahrermodell mit unterschiedlich einstellbaren Fahrertypen (z.B. Vorgabe von Beschleunigungsverhalten) generiert. Das Fahrermodell ist nicht Gegenstand dieser Veröffentlichung und soll somit hier nicht behandelt werden.

## 2.2 Hybrid-Betriebsstrategie

Die primäre Aufgabe einer Betriebsstrategie für ein Hybridfahrzeug ist die geeignete Auswahl einer Leistungsquelle (E-Maschine oder Verbrennungsmotor oder eine sinnvolle Kombination aus beidem) verbunden mit dem optimalen Betriebspunkt des ausgewählten Aggregates. Eine der wichtigsten Aufgaben beim Parallelhybrid ist die Berechnung des Lademoments für die HV-Batterie, weil das Lademoment im Gegensatz zu anderen Hybridformen (z.B. Leistungsverzweigung) [6] in gewissen SOC-Grenzen frei gewählt werden kann und sich somit dramatisch auf die Verbrauchsentwicklung während des Fahrbetriebs auswirkt.

Die Betriebsstrategie unterscheidet folgende Betriebsfälle:

### Fall 1: hybridisches Fahren

$$P_{Getriebe, zu} = P_{Rad} + P_{Getriebeverl} \quad (9)$$

$$P_{VKM, Kuppl} = P_{Getriebe, zu} - P_{Elm, mech} \quad (10)$$

### Fall 2: elektrisches Fahren

$$P_{Getriebe, zu} = P_{Elm, mech} \quad (11)$$

$$P_{VKM, Kuppl} = 0 \quad (12)$$

wobei  $P_{Elm, mech}$  die mechanische Leistung der elektrischen Maschine (EM),  $P_{Getriebeverl}$  die Getriebeverlustrichtung und  $P_{VKM, Kuppl}$  die verbrennungsmotorische Leistung auf Kupplungsebene sind.

## 2.3 E-Maschinen- und Batteriemodell

Die EM ist bei Hybridfahrzeugen aufgrund ihres hohen Drehmoments und hohen Wirkungsgrades häufig eine permanenterregte Synchronmaschine (PSM). Die Schnittstelle zur HV-Batterie ist die Batterieleistung  $P_{Bat}$ , die sich in den jeweiligen Fahrsituationen (hybridisches Fahren, elektrisches Fahren) gemäß (Gleichung 13) einstellt.

$$P_{Bat} = -P_{Elm, mech} \cdot \eta_{Elm}^k - P_{Bordnetz} \quad (13)$$

wobei  $\eta_{Elm}$  der Wirkungsgrad der EM inklusive des Inverters ist.  $\eta_{Elm}$  ist eine statische Abbildung in Form eines Kennfeldes. Aufgrund des Zwei-Quadrantenbetriebes der EM ist

$$k = \begin{cases} 1, & \text{wenn } P_{Elm} < 0 \\ -1, & \text{wenn } P_{Elm} > 0 \end{cases} \quad (14)$$

wobei  $P_{Elm}$  die elektrische Leistung der EM ist.

Der Ladungsinhalt einer Batterie wird durch das Produkt von Strom und Dauer des Lade- bzw. Entladevorgangs bestimmt. Dabei kann der Ladezustand relativ einfach durch die Batterieladezustandsgleichung [7]

$$SOC(t) = SOC(t_0) + \int_{t_0}^{t_e} \eta \cdot \dot{SOC} \cdot dt \quad (15)$$

mit

$$\dot{SOC} = f(SOC(t), u(t)) = \frac{100}{3600 \cdot Q_{Bat}} I_{Bat}(SOC(t), u(t)) \quad (16)$$

und

$$I_{Bat}(SOC(t), u(t)) = -\frac{U_0(SOC(t)) - \sqrt{U_0^2(SOC(t)) + 4 \cdot R_i(SOC(t)) \cdot P_{Bat}(u(t))}}{2 \cdot R_i(SOC(t))} \quad (17)$$

$$P_{Bat}(u(t)) = -u(t) \cdot \omega_{Elm} \cdot \eta_{Elm}^k - P_{Bordnetz} \quad (18)$$

berechnet werden, wobei  $Q_{Bat}$  die Batteriekapazität in [Ah],  $U_0$  die Leerlaufspannung in [V],  $R_i$  den ohmschen Innenwiderstand der Batterie in [Ohm],  $\omega_{Elm}$  die Winkelgeschwindigkeit der EM in [rad/s],  $P_{Bordnetz}$  die Leistung vom Bordnetzsystem und  $\eta$  den Lade- bzw. Entladewirkungsgrad beschreiben. Das Lademoment  $u(t)$  ist die zu optimierende Größe. Obwohl die Coulomb-Zählmethode einfach aussieht, ist die Genauigkeit dieser Methode von mehreren Einflussgrößen abhängig. Zu den wichtigsten Einflussgrößen gehören [8]:

- der Hysterese-Effekt der Leerlaufspannung  $U_0$
- die Temperatur

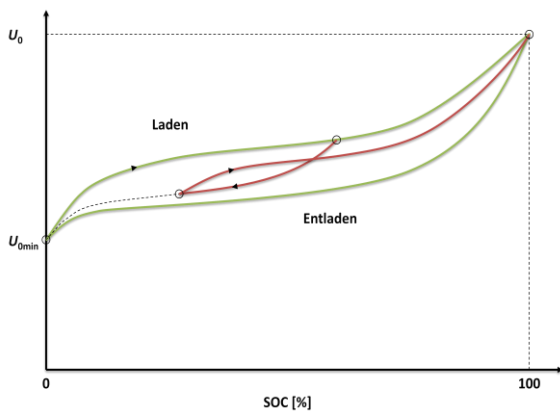


Abbildung 3: Prinzip des Hysterese-Effektes

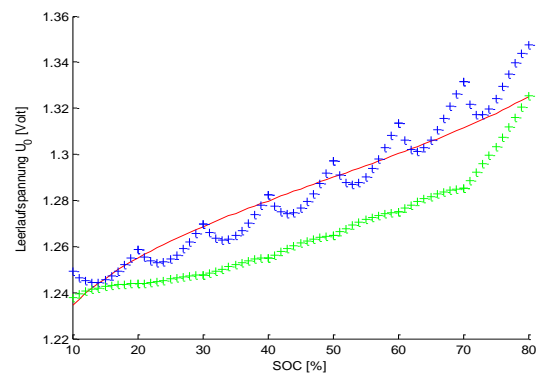


Abbildung 4: Hysterese-Effekt einer NiMH-Batterie bei 5% SOC-Hub

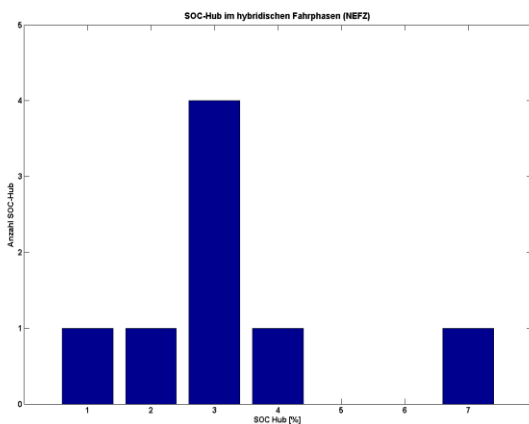


Abbildung 5: SOC-Abweichung im NEFZ-Zyklus

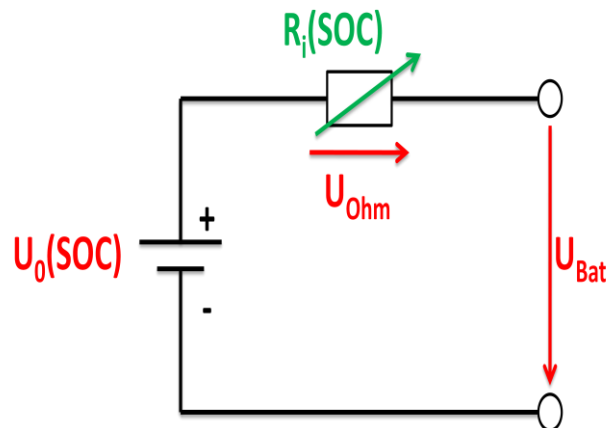


Abbildung 6: Einfaches Batteriemodell

Die Temperatur spielt in dieser Arbeit keine Rolle, da ein aktives Thermomanagement vorausgesetzt wird und die Temperatur der Batterie in einem engen Arbeitsfenster stabilisiert. Der Hysterese-Effekt der Leerlaufspannung  $U_0$  kann bei der Betrachtung des NEFZ-Zyklus vernachlässigt werden, da die häufigsten SOC-Hübe unterhalb von 5% stattfinden (Abbildung 5) und somit nicht im Bereich des "Memory-Effekts" liegen (siehe Abbildung 4). Aufgrund dessen kann ein einfaches Batteriemodell bestehend aus der Elektro-Motorischen Kraft  $E_0$  und einem seriellen ohmschen Widerstand  $R_i$  benutzt werden.  $R_i$  ist über den SOC-Verlauf veränderlich.

### 3 Optimalsteuerungstheorie

Es sind in der neueren Literatur zwei Verfahren sehr intensiv untersucht worden, um deterministische Optimalsteuerungsprobleme für Hybrid-Fahrzeuge zu lösen. Das erste Verfahren ist bekannt unter dem Hamilton-Jacobi-Bellman-Verfahren, worauf die Dynamische Programmierung beruht. Das zweite Verfahren ist das Pontryaginsche Maximumprinzip (PMP). Es beruht auf der Theorie der Variationsrechnung und leitet für ein Optimalsteuerungsproblem die notwendigen Bedingungen ab. Beide Verfahren können in zwei unterschiedliche Kategorien eingeteilt werden: den "direkten Verfahren" und den "indirekten Verfahren". Die Dynamische Programmierung gehört zu den direkten Verfahren, das Pontryaginsche Maximumprinzip zu den indirekten Verfahren. In Tabelle 1 ist eine kurze Gegenüberstellung der beiden Kategorien zu sehen.

	Direktes Verfahren	Indirektes Verfahren
<b>Pro</b>	Keine Kenntnis der Optimalsteuerungstheorie notwendig Zustandsbeschränkungen sind leichter zu berücksichtigen oft größerer Konvergenzbereich	liefern Einsicht in die Struktur der optimalen Lösung genauere Lösung möglich
<b>Contra</b>	Benötigt hohe Rechenkapazitäten, wenn der Suchraum groß und die Lösung hinreichend genau sein muss	Algorithmus nicht unmittelbar auf andere Probleme übertragbar

Tabelle 1: Vergleich zwischen "direkten und indirekten Verfahren"

In dieser Arbeit wird das Pontryaginsche Maximumprinzip angewendet, da der Suchraum für eine hinreichend genaue Verbrauchsoptimierung eines Parallelhybriden sehr groß ist. Im Vergleich zu den direkten Verfahren wie z.B. DP, ist das PMP in seiner Anwendung komplexer aber in seiner Ausführungszeit viel schneller.

#### 3.1 Ableiten der notwendigen Bedingungen für eine optimale Steuerung

Für die Verbrauchsoptimierung eines Parallelhybriden wird das optimale Lademoment  $u^*$  gesucht, so dass sich der Verbrauch der Verbrennungskraftmaschine über die Zeit minimiert. Dieses Optimierungsproblem kann wie folgt definiert werden:

$$\left\{ \begin{array}{l} \max_{u \in \mathbb{R}^1} \left\{ J = h(SOC(t_e), t_e) + \int_{t_0}^{t_e} g(SOC(t), u(t), t) \cdot dt \right\} \\ \dot{SOC}(t) = f(SOC(t), u(t), t) \\ SOC(t_0) = SOC(t_e) \\ SOC_{\min} \leq SOC \leq SOC_{\max} \\ u_{\min} \leq u \leq u_{\max} \\ u \in U \subset \mathbb{R}^1 \\ \forall t \in [t_0, t_e] \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} (19a) \\ (19b) \\ (19c) \\ (19d) \\ (19e) \end{array}$$

wobei  $J$  das Kostenfunktional,  $g(SOC, u, t)$  die Verbrauchsbemessungsfunktion des Gesamtfahrzeugsystems,  $h(SOC(t_e), t_e)$  die Endzustandsbewertung und  $f(SOC, u, t)$  die Ladezustandsgleichung der HV-Batterie ist und  $[SOC_{\min}, SOC_{\max}]$  die Ladezustandsbeschränkungen und  $[u_{\min}, u_{\max}]$  die Stellgrößenbeschränkungen beschreiben. Das Lösen des Kostenfunktionals mit Hilfe der Variationsrechnung [9] führt zu den notwendigen Bedingungen die eine optimale Steuerung  $u^*$  erfüllen muss, um das Kostenfunktional zu maximieren. Die Hamiltonfunktion wird definiert als

$$H(t, SOC, u, \lambda) = g(t, SOC(t), u(t)) + \lambda(t)^T \cdot f(t, SOC(t), P_{Bat}(u(t))) \quad (20)$$

wobei  $\lambda(t)$  der eindimensionale Vektor der adjungierten Variable oder Kozustand ist.

### **Pontryaginsches Maximumsprinzip (PMP)**

Es sei  $u^*(t)$  eine optimale Steuerung mit zugehörigem Zustand  $SOC$ . Dann existiert ein zugehöriger adjungierter Zustand  $\lambda(t) \in \mathbb{R}^1$ , stetig für alle  $t \in [t_0, t_e]$ , welcher das adjungierte Differentialgleichungssystem erfüllt [13], so dass gilt:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{SOC} = H_{\lambda} = f \\ \dot{\lambda} = -H_{SOC} \\ H(t, SOC(t), u^*(t), \lambda(t)) = \max_{v \in U} H(t, SOC(t), v(t), \lambda(t)) \\ \forall t \in [t_0, t_e] \\ SOC(t_0) = SOC_0 \\ SOC(t_e) = SOC_e \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} (21a) \\ (21b) \\ (21c) \\ (21d) \\ (21e) \end{array}$$

Die Gleichungen 21a und 21b werden als kanonische Gleichungen bezeichnet.

### **Definition 1**

$u(t)$  ist eine zulässige Steuerung, falls  $u(t)$  stückweise stetig ist und innerhalb eines geschlossenen Intervalls  $U = [u_{\min}, u_{\max}]$  liegt [5,13].

### **Definition 2**

Eine optimale Steuerung ist eine zulässige Steuerung  $u^*(t)$ , falls sie unter allen zulässigen Steuerungen das Zielfunktional - mit den Prozessgleichungen als Nebenbedingungen - maximiert [5,13].

## **3.2 Kostenfunktional $g(SOC, u)$**

Die Verbrauchsbemessungsfunktion  $g$  wird in der einschlägigen Literatur [3] auf den Verbrennungsmotor, z.B. auf das be-Kennfeld oder Betriebslinien für eine Familie von

bestmöglichen motorischen Betriebspunkten, bezogen. Das gilt im Prinzip aber nur für Hybrid-Antriebsstrangstrukturen, deren Drehzahl/Last-Entkopplung (Phlegmatisierung) im Vordergrund steht. Für einen Parallelhybriden, der aufgrund seiner anderen Betriebsweise und unterschiedlichen Antriebsstrangstruktur und Dimensionierung eine solche Strategie nicht anwenden kann, muss ein neuer Ansatz für eine geeignete Verbrauchsbemessungsfunktion  $g$  gefunden werden. Als neuer Ansatz dient der vereinfachte Wirkungsgrad  $\eta_{System}$  des Gesamtsystems

$$\eta_{System} = \left[ 1 + \frac{\eta_{Elm}(u) \cdot \eta_{Bat}(u) \cdot \bar{\eta}_{Entladen} - 1}{\left(\frac{M_{FW}}{u} + 1\right)} \right] \cdot \eta_{VKM}(M_{FW} - u), \quad (22)$$

wobei  $\eta_{VKM}(M_{FW} - u)$  der Wirkungsgrad der Verbrennungskraftmaschine mit Lastpunkterhöhung  $u$ ,  $M_{FW}$  das Fahrerwunschmoment,  $\bar{\eta}_{Entladen}$  der mittlere Entladewirkungsgrad beim elektrischen Fahren und  $\eta_{Bat}$  der Wirkungsgrad der HV-Batterie ist und sich aus

$$\eta_{Bat} = \begin{cases} \frac{U_0}{U_0 + U_{Ohm}}, & \text{wenn } P_{Bat} > 0 \\ \frac{U_0 + U_{Ohm}}{U_0}, & \text{wenn } P_{Bat} < 0 \end{cases} \quad (23)$$

ergibt. Der Spannungsabfall am ohmschen Anteil der Batterie ergibt sich zu

$U_{Ohm} = R_i \cdot I_{Bat}$ . Das Integral von  $g$  wird so gewählt, dass es dem gewichteten Gesamtwirkungsgrad des Systems entspricht. Somit entspricht der Maximierung von  $J$

$$J = \int_{t_0}^{t_e} g_{System} \cdot dt \quad (24)$$

einer Verbrauchsminimierung mit  $g_{System} = \eta_{System} \cdot P_{FW} [Wh]$ .

## 4 Numerische Berechnung der optimalen Steuertrajektorie

Durch Anwenden der Variationsrechnung auf das Optimierungsproblem von (19a-19e) ergibt sich - wenn  $t_e$  und  $SOC(t_e)$  fest sind - ein Zweipunkt-Randwertproblem mit

$$\dot{SOC}^*(t) = \frac{\partial H}{\partial \lambda} = f(SOC^*(t), u^*(t), t) \quad (25)$$

$$\dot{\lambda}^*(t) = -\frac{\partial H}{\partial SOC} = -\left[ \frac{\partial f}{\partial SOC}(SOC^*(t), u^*(t), t) \right]^T \cdot \lambda^*(t) - \frac{\partial g}{\partial SOC}(SOC^*(t), u^*(t), t) \quad (26)$$

$$SOC^*(t_0) = SOC_0 \quad (27)$$

$$\lambda^*(t_e) = q \cdot [SOC_{ist}(t_e) - SOC(t_e)], \quad (28)$$

wobei  $q$  ein großer reell wertiger positiver Faktor ist. Das oben beschriebene Zweipunkt-Randwertproblem kann durch Vorwärts-Rückwärts-Integration [9] der Zustandsgleichung (25) bzw. der Kozustandsgleichung (26) gelöst werden. Dazu wird eine Steuerung  $u$  benötigt. Für die numerische Berechnung der optimalen Steuerung  $u^*$  wurde das Gradientenverfahren [9] gewählt. Hierbei werden für eine geschätzte Startsteuerung  $u_0$  die oben beschriebenen



Zustands- und Kozustandsgleichungen gelöst und mittels des Gradienten der Hamiltonfunktion

$$\frac{\partial H}{\partial u} = \left[ \frac{\partial f}{\partial u}(SOC^*(t), u^*(t), t) \right]^T \cdot \lambda^*(t) + \frac{\partial g}{\partial u}(SOC^*(t), u^*(t), t) \quad (29)$$

die optimale Steuerung  $u^*$  iterativ mittels

$$u_{k+1} = u_k - \gamma \cdot \frac{\partial H}{\partial u} \quad (30)$$

berechnet, wobei  $\gamma$  eine geeignete Schrittweite ist.

Das oben beschriebene Verfahren ist bei einem Parallelhybriden angewendet worden, wobei hier das Lademoment gesucht und auf  $u_{\min}(n_{Elm}) \leq u \leq 0$  begrenzt wurde, um verbrauchsineffiziente Boostphasen mit positiven elektrischen Momenten zu vermeiden.  $n_{Elm}$  ist die Drehzahl der elektrischen Maschine. Die Simulationsergebnisse der Optimierung sind in den Abbildungen 7 bis 12 ersichtlich. Die Abweichung vom SOC-Endwert wird quadratisch mit  $h(SOC(t_e), t_e) = 0.5 \cdot \Delta SOC(t_e)^2$  bestraft. Das zu maximierende Kostenfunktional mit Bestrafungsfaktor ergibt sich zu

$$\max_u J = \sum_{i=0}^{t_e/Abtastzeit} \eta_{System}(i) \cdot P_{FW}(i) \cdot \Delta t - 0.5 \cdot \text{Bestrafungsfaktor} \cdot \Delta SOC(t_e)^2. \quad (31)$$

Der Bestrafungsfaktor wurde mit dem "Try-and-Error"-Prinzip ermittelt. Für ein schnelles und numerisch stabiles konvergieren der SOC-Trajektorie auf den SOC-Endwert  $SOC(t_e)$  hat sich der Bestrafungsfaktor zwischen 10...1000 als geeignet herausgestellt.

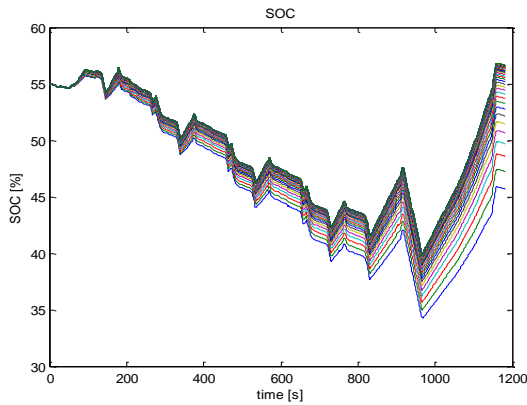


Abbildung 7: Zeitlicher SOC-Verlauf bei unterschiedlichem Iterationsschritt

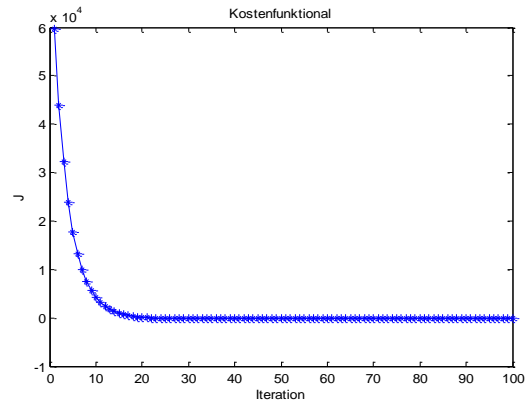


Abbildung 8: Verlauf des Kostenfunktionals J

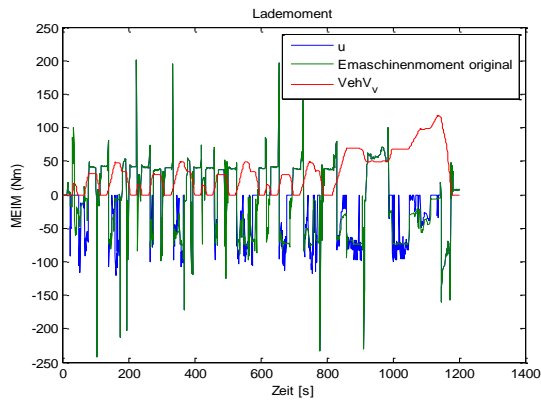


Abbildung 9: Zeitliche Gegenüberstellung des optimalen Lademoments  $u^*(t)$  und der Vorserien-Bedatung im NEFZ-Zyklus

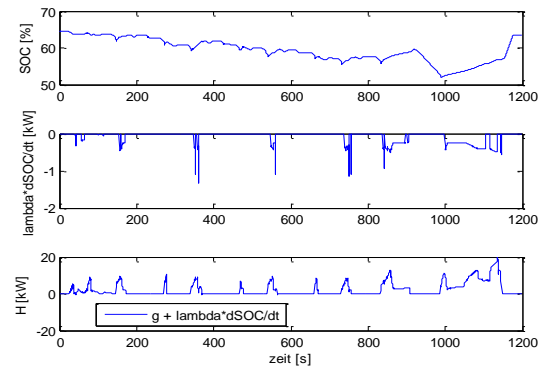


Abbildung 10: Zeitlicher Verlauf der Hamiltonfunktion über den gesamten NEFZ-Zyklus. Aufgenommen bei der dritten Iteration und  $\lambda = -9.5$

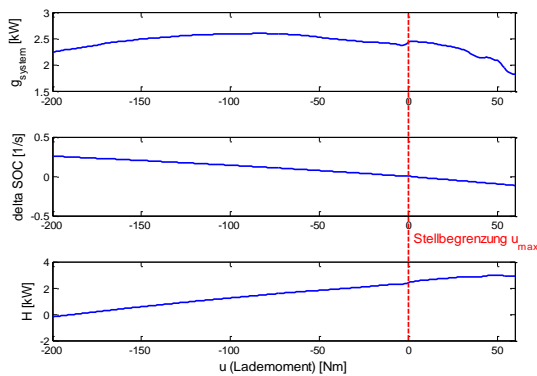


Abbildung 11: Bestimmung des optimalen Lademoments mit der Hamiltonfunktion bei der dritten Iteration bei  $M_{FW} = 75 \text{ Nm}$ ,  $n_{Elm} = 1180 \text{ 1/min}$ ,  $SOC = 63.2 \%$  und  $\lambda = -9.5$

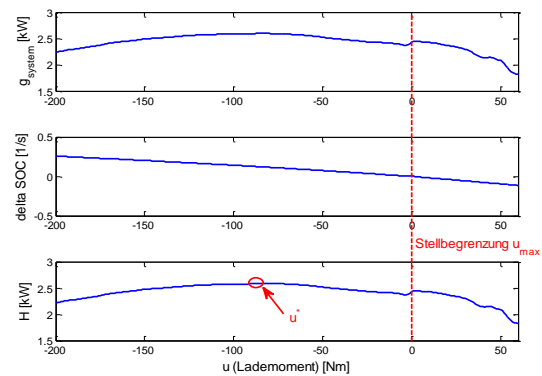


Abbildung 12: Bestimmung des optimalen Lademoments mit der Hamiltonfunktion bei der 100. Iteration bei  $M_{FW} = 75 \text{ Nm}$ ,  $n_{Elm} = 1180 \text{ 1/min}$ ,  $SOC = 63.2 \%$  und  $\lambda = -0.08$

In Abbildung 11 ist ersichtlich, dass das optimale Lademoment  $u^*$  gemäß der Maximierung der Hamiltonfunktion aufgrund der  $u_{max}$ -Begrenzung auf das Nullmoment begrenzt ist. Im weiteren Optimierungsverlauf löst sich das  $u^*$  vom Nullmoment und stellt sich bei  $-80 \text{ [Nm]}$  ein (Abbildung 12). In Tabelle 2 sind die wesentlichen Ergebnisse tabellarisch zusammengefasst.

Bestrafungsfaktor = 10	Ergebnisse
SOC-Endwertabweichung [%]	0.02
Verbrauchersparnis [l/100km]	0.19
Iterationen/ Dauer [h]	143/3,5

Tabelle 2: Ergebniszusammenfassung der Optimierung nach Pontryagin

Desweiteren ist festzuhalten, dass der zeitliche Verlauf der adjungierten Variable  $\lambda$  bei gewähltem Iterationsschritt nahezu konstant bleibt

$$\lambda(t) \approx \lambda_{konst} \quad (32)$$

da sich der Innenwiderstand  $R_i$  und die Leerlaufspannung  $U_0$  gemäß des einfachen Batteriemodells (Abbildung 6) nur moderat über den SOC-Hub verändern. Die bekannte "Equivalent Consumption Minimization Strategy" (ECMS) zeigt Analogien zur adjungierten Variable  $\lambda_{konst}$ . Beim ECMS-Verfahren wird jeweils ein konstanter Parameter für den Lade- bzw. Entladevorgang definiert und gezielt auch für unterschiedliche Hybridtopologien [10,11,12] erfolgreich eingesetzt.

## 5 Ausblick

In diesem Beitrag konnte aufgezeigt werden, wie eine Verbrauchsoptimierung beim Parallelhybriden - formuliert als Optimalsteuerungsproblem - in unterschiedlichen Entwicklungsphasen eingesetzt werden kann. Die zu optimierende Größe ist das Lademoment, welches den Betriebspunkt und somit den Wirkungsgrad des Gesamtsystems wesentlich beeinflusst. Weitere Einflussgrößen auf den Verbrauch eines Hybridfahrzeuges sind die Start/Stopp-Zeitpunkte, bzw. die Laufzeiten der einzelnen Betriebsphasen. Es ist zu erwarten, dass sich diese Zeitpunkte mit einem "hybriden" Optimalsteuerungsproblem optimieren lassen. Bei einem hybriden Optimalsteuerungsproblem gibt es neben den kontinuierlichen Steuerungsvariablen  $\mathbf{u}$  auch diskrete Steuerungsvariablen  $\mathbf{w}$ . Die Erweiterung des Optimalsteuerungsproblems als hybride Form ist momentan in Untersuchung.

## Literatur

- [1] Jalil, N., et al.: *A Rule-Based energy Management Strategy for a Series Hybrid Vehicle*, in Proc. 1997 American Control Conf., Albuquerque, New Mexico, Jun, pp. 689-693, 1997
- [2] Biermann, J-W.: *Vorausschauende Betriebsstrategie für Hybridfahrzeuge der Subkompaktklasse*, ATZelektronik, 06/2009 Jahrgang 4
- [3] Liu, J. und Peng H.: *Control Optimization for a Power-Split Hybrid Vehicle*, in Proc. 2006 American Control Conf., Minneapolis, MN, pp. 466-471, 2006
- [4] Lin, C. C., et al.: *A Stochastic Control Strategy for Hybrid Electric Vehicles*, in Proc. 2004 American Control Conf., Boston, MA, pp. 4710-4715, 2004
- [5] Pinch, E. R.: *Optimal Control and the Calculus of Variation*, Oxford Univ. Press, Oxford, 1993

- [6] Canders, W. R., et al: *Elektrische leistungsverzweigte Stufenlosegetriebe für Hybridfahrzeuge*, VDI-Bericht Nr. 1975, VDI-Verlag, 2006
- [7] Windarko, N. A. und Choi, J.: *SOC Estimation Based on OCV for NiMH Batteries Using an Improved Takacs Model*, Journal of Power Electronics, Vol 10, No 2, March 2010
- [8] Zhang, H. und Chow, M.-Y.: *On-line Comprehensive PHEV Battery Dynamic Modeling Serving a Municipal Parking Deck Intelligent Energy Management System (iEMS)*, Proceedings of 2010 FREEDM Systems Center Annual Conference, Tallahassee, FL, USA, May 18-19, 2010
- [9] Kirk, D. E.: *Optimal Control Theory*, Dover Publications Inc., 1998
- [10] Rousseau, G., Sinoquet, D. und Rouchon, P.: *Constraint Optimization of Energy Management for a Mild-Hybrid Vehicle*, Oil-Gas Science and Technology, IFP, Vol 62, No. 4, pp. 623-624, 2007
- [11] Delprat, S., Lauber, J., Marie, T. und Rimaux, J.: *Control of a Parallel Hybrid Powertrain: Optimal Control*, IEEE Trans. Veh. Technol., Vol. 53, No. 3, pp. 872-881, 2004
- [12] Barsali, S., Miulli, C., Possenti, A. : *A Control Strategy to Minimize Fuel Consumption of Series Hybrid Electric Vehicles*, IEEE Trans. Energy Convers., Vol. 19, No. 1, pp. 187-195, 2004
- [13] Pontrjagin, L. S.: *Mathematische Theorie optimaler Prozesse*, Dt. Verlag der Wissenschaft, Berlin, 1964