

Lattice Boltzmann Methode zur Simulation von Strömungsverhalten in Arterien

Daniel Leitner, Johannes Kropf, Siegfried Wassertheurer, Felix Breitenecker
dleitner@osiris.tuwien.ac.at

ARCS Seibersdorf Research GmbH, Div. Biomedical Engineering, A-2444 Seibersdorf
TU Wien, Institut für Analysis und Scientific Computing
Wiedner Hauptstrasse 8-10, A-1040 Wien

Kurzfassung

Ein globales reguliertes dynamisches Modell [1] des kardiovaskulären Systems wird mit einem lokalen Blutflussmodell gekoppelt. Dadurch erlangt man Einblick in das lokale Strömungsverhalten an Bifurkationen, oder kann pathologische Fälle wie Shunts, Stents oder Stenosen unter verschiedenen Voraussetzungen untersuchen. Das lokale Strömungsverhalten wird dabei mit der Lattice Boltzmann Methode berechnet, wobei die Randbedingungen aus dem globalen Modell stammen.

Einleitung

Über die Hälfte aller Todesfälle in den Industrienationen folgen aus Erkrankungen des kardiovaskulären Systems. Um ein besseres Verständnis über dessen Funktion zu erlangen, werden verschiedene mathematische Modelle verwendet. Um den lokalen Blutfluss zu simulieren finden Methoden aus der Computer Fluid Dynamics Verwendung, die auf Gittern arbeiten, wie Finite Elemente (FEM), Finite Volumen (FVM) oder die Lattice Boltzmann Methode (LBM). Diese Modelle liefern sehr exakte Auskünfte über das Strömungsverhalten in einzelnen Arterienstücken. Die Verfahren können aber nicht auf einen kompletten Arterienbaum angewandt werden, weil die verwendeten Modelle zu groß sind, und es daher nicht möglich ist die Parameter des Modells zu identifizieren.

Modellbeschreibung

Um das kardiovaskuläre System global zu beschreiben werden stark vereinfachte Modelle verwendet. Die systemischen Größen werden dabei mit einem geregelten Kompartimentmodell beschrieben. Das Modell wird mit einem eindimensionalen Arterienbaum gekoppelt, der mittels Wormersley Methode gelöst wird. In [1] wird ein solches dynamisches Modell vorgestellt, dessen Parameter patientenspezifisch identifiziert werden können. Diese zwei Ansätze sollen mit der LBM kombiniert werden, um an geeigneten Stellen im Arterienbaum, wie in Bifurkationen oder Shunts, lokales Strömungsverhalten zu untersuchen (siehe Abbildung 1). Die Parameter Länge, Radius und Elastizität des Arteriensegments, sowie

die Zustandsgrößen Druck und Fluss, werden aus dem globalen Modell übernommen und gehen in die Randbedingungen des lokalen Modells ein, wobei zusätzlich genauere lokale Informationen über die Geometrie verwendet werden können.

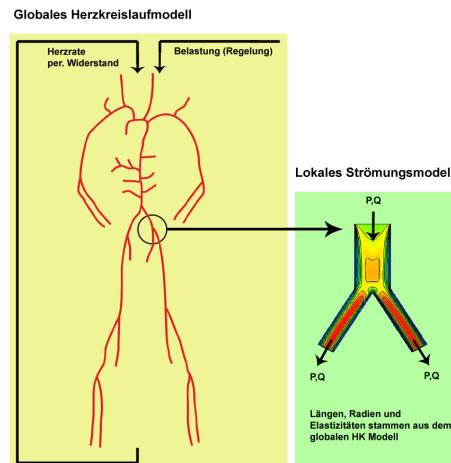


Abbildung 1: Zusammenhang zwischen lokalen und globalen Modell

Die Lattice Boltzmann Methode

Für die Berechnung der Strömung wird die inkompressible Navier Stokes Gleichung mit der Lattice Boltzmann Methode gelöst [2]. Die Methode ist zur Simulation für nichtstationären Blutfluss geeignet [3] und hat gegenüber konventionellen Methoden wie FEM oder FVM bedeutende Vorteile. Die Methode ist einfach zu implementieren und leicht zu parallelisieren, vor allem aber steigt der Aufwand des Verfahrens nicht durch zeitabhängige Randbedingungen. Ziel ist es die Strömung in einem Arteriensegment zu veranschaulichen. Im Zweidimensionalen ist das mit LBM nahezu in Echtzeit möglich und einfach darzustellen. Die Methode kann jedoch auch analog für dreidimensionale Blutflusssimulation verwendet werden.

Das Verfahren arbeitet am mesoskopischen Level, das mit der Boltzmann Gleichung mit einfacher Relaxationszeit beschrieben wird:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \xi \cdot \nabla f = -\frac{1}{\lambda}(f - f^{(0)})$$

Dabei ist $f \equiv f(x, \xi, t)$ die Verteilungsfunktion der Masse der Partikel, ξ die Partikelgeschwindigkeit, $f^{(0)}$ die Equilibriumsverteilung (die sogenannte Maxwell-Boltzmann Verteilungsfunktion) und λ die Relaxationszeit.

Diskretisiert man diese Gleichung im Geschwindigkeitsraum und in der Zeit, erhält man nach einer speziellen Diskretisierung [4] die Lattice Boltzmann Gleichung mit der Bhatnagar-Gross-Krook (BGK) Approximation des Kollisionsoperators [5].

$$f_\alpha(x_i + e_\alpha \Delta t, t + \Delta t) - f_\alpha(x_i, t) = -\frac{1}{\lambda}(f_\alpha(x_i, t) - f_\alpha^{(eq)}(x_i, t))$$

Die rechte Seite der Gleichung beschreibt die Kollision der Partikel. Der Relaxationsparameter λ beeinflusst dabei die Viskosität.

Die Equilibriumsfunktion $f^{(eq)}$ wird so gewählt, dass die Erhaltungssätze für Masse und Moment gelten (nach der Ansatzmethode [6]).

$$f_a^{(eq)} = \rho \omega_\alpha \left(1 + \frac{3}{c_s^2} e_\alpha \cdot u + \frac{9}{2c_s^4} (e_\alpha \cdot u)^2 - \frac{3}{2c_s^2} u \cdot u \right)$$

wobei die Dichte ρ durch $\rho = \sum_0^8 f_\alpha$ und die Geschwindigkeit u durch $\rho u = \sum_0^8 e_\alpha f_\alpha$ gegeben ist. Im zweidimensionalen Raum werden die Vektoren $\{e_\alpha\}$ gemäß der Abbildung 2 definiert, die Gewichte ω_α sind gegeben durch

$$\omega_\alpha = \begin{cases} 4/9, & \alpha = 0 \\ 1/9, & \alpha = 1, 3, 5, 7 \\ 1/36, & \alpha = 2, 4, 6, 8 \end{cases}$$

Der Druck p im Modell beträgt $p = \rho c_s^2 = \frac{\rho}{3}$ mit der Schallgeschwindigkeit $c_s = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Die Viskosität ν wird über den Relaxationsparameter λ gesteuert und ist gegeben durch $\nu = (2\lambda - 1)/6$.

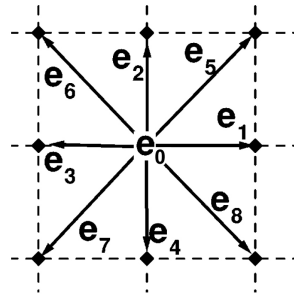


Abbildung 2: Richtungsvektoren für LBM in 2D mit neun Freiheitsgraden (D2Q9)

Die makroskopischen Gleichungen können durch die sogenannte Chapman-Enskog Entwicklung erhalten werden [7]. Dabei konvergiert die Geschwindigkeit

$$u(x, t) \equiv \sum_0^8 e_\alpha f_\alpha(x, t) / \sum_0^8 f_\alpha$$

quadratisch im Raum und linear in der Zeit gegen eine Lösung der Navier-Stokes Gleichungen, wenn die Mach-Zahl hinreichend klein ist, also $\frac{|u|}{c_s} \ll 1$ ist.

Randbedingungen

Die geometrischen Informationen einer Bifurkation werden aus computertomographischen (CT) Aufnahmen gewonnen. Die Elastizität geht in das Modell über die Schallgeschwindigkeit ein, geometrische Veränderungen werden vernachlässigt. Mit der Moens-Kortweg Gleichung kann über den Young Modulus E und die Dicke der Arterienwand h , den Radius der Arterie r und der Dichte ρ , die Schallgeschwindigkeit c_s berechnet werden [8].

$$c_s = \sqrt{\frac{Eh}{2r\rho}}$$

An der Arterienwand gilt die so genannte Bounce Back on Link (BBL) Regel, die numerisch sehr stabil ist [9]. Das Modell soll zukünftig dahingehend erweitert werden, dass die Elastizität über die Randbedingungen, wie in [10] beschrieben wird. Das ermöglicht einen Einblick über die geometrische Veränderung in der Bifurkation.

Der Druck in der Arterie am proximalen und distalen Ende wird aus dem dynamischen Kreislaufmodell übernommen und als Randbedingung vorgegeben. Dabei wird die Dichte so verändert, dass sich der gewünschte Druck einstellt, und die Geschwindigkeit im Knoten erhalten bleibt.

$$f_\alpha^{(neu)}(x, t) := f_\alpha(x, t) + f_\alpha^{(eq)}(u(x, t), \rho^{(neu)}(x, t) - \rho(x, t))$$

Ergebnisse

Im Folgenden soll das Strömungsverhalten in der Arteria Iliaca untersucht werden. Die Länge der A. Iliaca Communis beträgt 5.8 cm mit einem Radius von 0.625 cm. Die A. Iliaca Interna hat eine Länge von 5 cm mit einem Radius von 0.6 cm und die A. Iliaca Externa eine Länge von 14 cm mit einem Radius von 0.3 cm (siehe Abbildung 3).



Abbildung 3: Zweidimensionale Darstellung der Iliaca

Die Strömung soll daher in einem Bereich von in etwa $20\text{cm} * 3\text{cm}$ simuliert werden. Die Zellengröße Δx und die Schallgeschwindigkeit c_s müssen vernünftig gewählt werden, die übrigen Größen ergeben sich aus diesen Werten. Die Wahl von $\Delta x = 0.05\text{cm}$ führt zu einer geeigneten Auflösung von $400 * 60$ Knoten, die Schallgeschwindigkeit in der A. Iliaca beträgt zwischen $5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ und $6 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ und wird einfachheitshalber auf $1000 \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{\text{cm}}{\text{s}} \approx 533 \frac{\text{cm}}{\text{s}}$ gesetzt.

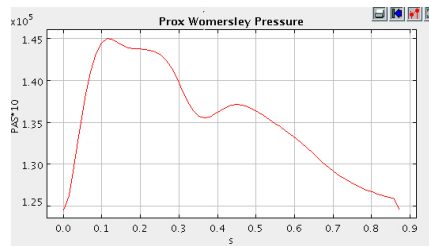


Abbildung 4: Distaler Druckverlauf in der Iliaca Communis

Der Strömungsverlauf wird nun mit den oben beschriebenen Randbedingungen berechnet. Der Druckverlauf aus Abbildung 4 stammt aus dem dynamischen Modell. In Abbildung 5 ist das Strömungsfeld zu verschiedenen Zeitpunkten dargestellt.

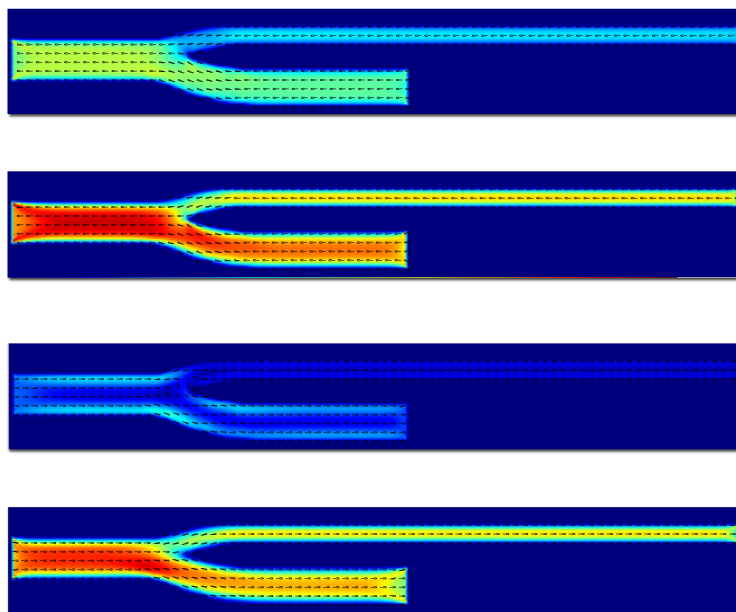


Abbildung 5: Die Strömung in der Iliaca für die Zeitpunkte $t=0.1s$, $t=0.2s$, $t=0.4s$ und $t=0.6s$

Ausblicke

Mit dem Modell können Einblicke in das lokale Strömungsverhalten in Bifurkationen gewonnen werden. Es ist jedoch noch nicht möglich geometrische Veränderungen, die auf-

grund von Änderung der Elastizität entstehen, zu veranschaulichen. Das Modell soll dahingehend erweitert werden. Die zweidimensionale Darstellung der Strömung bietet einige Vorteile, sind jedoch dreidimensionale Daten aus CT Querschnittbildern vorhanden, können diese meist nicht vernünftig auf zwei Dimensionen projiziert werden. Daher ist es notwendig dreidimensionale Strömungsberechnung und Visualisierung zu verwenden. Das Modell, das derzeit ein D2Q9 Gitter verwendet, muss daher um ein D3Q19 (drei Dimension, 19 Freiheitsgrade) Gitter erweitert werden.

Literatur

- [1] *J. Kropf, M. Wibmer, S. Wassertheurer, J. Krocza*: An Identifiable Model for Dynamic Simulation of the Human Cardiovascular System. Paris: Proc. Eurosim, 2004.
- [2] *Xiaoyi He, Li-Shi Luo*: Lattice Boltzmann model for the incompressible Navier-Stokes equation, Journal of Statistical Physics, 88 (1997) S. 927-944 .
- [3] *A.G. Hoeksta, Jos van't Hoff, A.M. Artoli, P.M.A. Sloot*: Unsteady flow in a 2D elastic tube with the LBGK method, Future Generation Computer Systems, The International Journal of Grid Computing: Theory, Methods and Applications, 20 (2004) S. 917-924.
- [4] *M. Junk, W.A. Yong*: Rigorous Navier-Stokes Limit of the Lattice Boltzmann Equation, Technical Report, IWR, Universität Heidelberg, 2003.
- [5] *P.L. Bhatnagar, E. P. Gross, M. Krook*: A modell for collision processes in gases. I. Small amplitude processes in charged and neutral one component system, Phys. Rev. A 94 (1954) S. 511
- [6] *Dieter A. Wolf-Gladrow*: Lattice-Gas Cellular Automata and Lattice Boltzmann Models - An Introduction, Lecture Notes in Mathematics 1725, Springer (2002) S. 159-189.
- [7] *S. Chen, H. Chen, D.O. Martinez, W.H. Matthaeus*: Phy. Rev. Lett. 67, 3776 (1991)
- [8] *W.W. Nichols, M.F. O'Rourke*: McDonald's blood flow in arteries, Arnold, (1998) S 54-72.
- [9] *A.J.C. Ladd*: Numerical simulation of particular suspensions via a discretized Boltzmann equation. Part 2, Numerical results, J. Fluid Mech. 271, 311 (1994)
- [10] *F. Haiping, W. Zuowei, L. Zhifang, M. Liu*: Lattice Boltzmann method for simulating the viscous flow in large distensible blood vessels, Physical Review E, 65, Issue 5, (2002)