

Integrierte Modellierung von Punkt- und Linienlasten auf elastischen Balken

Rüdiger Hohmann
hohmann@isg.cs.uni-magdeburg.de
Universität Magdeburg, Institut für Simulation und Graphik
Universitätsplatz 2, D-39106 Magdeburg

Kurzfassung

Die Delta-Funktion erlaubt es, auch Einzelkräfte als Punktlasten in die auf den Balken einwirkende Kraftdichte von Linienlasten zu integrieren und so einen geschlossenen Ausdruck zu bilden. Um den Einfluss der Linienlast zu bestimmen, ist im Allgemeinen eine numerische Integration erforderlich, während es für Punktlasten eine analytische Lösung unter Verwendung des Föppl-Symbols gibt, die zur Superposition numerisch darzustellen ist. Die Randbedingungen lassen sich durch Iteration erfüllen. Als Beispiel dient ein durch sein Eigengewicht und zwei Punktlasten deformierter Balken.

1 Einleitung

Unter einem Balken versteht man ein stabförmiges Bauteil, dessen Querschnittsabmessungen sehr viel kleiner sind als seine Länge und das senkrecht zu seiner Längsachse belastet wird. Ziel ist eine geschlossene Darstellung der Kraftdichte auf dem elastischen Balken, indem Punktlasten von Einzelkräften mittels Delta-Funktion in die Linienlast integriert werden. Einfache, insbesondere konstante Linienlasten, erlauben geschlossene analytische Lösungen für die Biegelinie eines Balkens [4]. Betrachtet werden allgemeine Linienlasten, z.B. in Form von Polygonzügen, deren Wirkung numerisch ermittelt werden muss. Daneben sind analytische, stückweise definierte Lösungen für Punktlasten bekannt. Die beiden unterschiedlichen Komponenten sollen durch Superposition die Lösung bilden. Diese gemischte Form von numerischem und analytischem Lösungsverfahren stellt einen weiteren Aspekt dar.

2 Grundlagen

2.1 Differentialgleichung der Biegelinie

Wir beschränken uns auf die gerade oder einachsige Biegung. Hierbei wird vorausgesetzt, dass die äußeren Lasten nur Querkräfte Q in z -Richtung sind und Momente M um die y -Achse hervorrufen, die senkrecht aus der Zeichenebene zeigt (Bild 1). Dies ist zum Beispiel der Fall, wenn der Querschnitt symmetrisch zur z -Achse ist und die äußeren Kräfte in der x, y -Ebene wirken. Wir benötigen statische Aussagen, geometrische Aussagen und das Elastizitätsgesetz. Mit (2.1) stehen sodann vier Differentialgleichungen

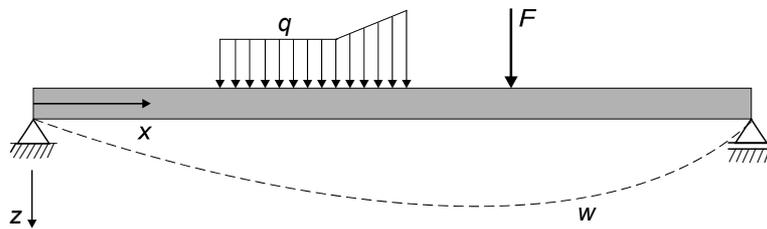


Bild 1: Beidseitig gelenkig gelagerter Balken mit Linien- und Punktlast

erster Ordnung zur Bestimmung von Q, M, ψ, w bei gegebener Belastung q zur Verfügung [4]:

$$Q' = -q, \quad M' = Q, \quad \psi' = \frac{M}{EI}, \quad w' = -\psi. \quad (2.1)$$

Die Gleichgewichtsbedingungen (Statik) für ein Balkenelement führen zu den Differentialgleichungen für Querkraft Q und Biegemoment M . Die Querkraft auf die rechte Schnittfläche eines Balkenelements ist in z -Richtung positiv, das Biegemoment ist es hier im mathematisch positiven Sinne.

Die Änderung $d\psi$ des Drehwinkels über die Länge dx ist proportional zum wirkenden Moment M . Man bezeichnet die dritte Differentialgleichung als das Elastizitätsgesetz für das Biegemoment; die Größe EI nennt man Biegesteifigkeit. Unter der Annahme, dass die Schubsteifigkeit sehr groß ist, folgt bei endlicher Querkraft Q die letzte Beziehung, die Durchbiegung w und Drehwinkel ψ verknüpft. Ein Balkenelement erfährt unter der Wirkung der Querkraft in diesem Falle keine Winkeländerung. Ein solcher Balken heißt schubstarr. Geometrisch bedeutet dies, dass Balkenquerschnitte, die vor der Deformation senkrecht auf der Balkenachse standen, auch nach der Deformation senkrecht auf der deformierten Balkenachse stehen. Man nennt dies und die Annahme vom Ebenbleiben der Querschnitte die *Bernoullischen Annahmen*. Sie sind für schlanke Balken hinreichend genau und für reine Biegung ($Q = 0$) sogar exakt [4].

Setzt man das differenzierte $w' = -\psi$ in $M = EI\psi'$ ein, so erhält man $w'' = -M/EI$. Hieraus kann durch Integration die Durchbiegung $w(x)$ bei bekanntem Momentenverlauf $M(x)$ bestimmt werden. Differenziert man $M = -EI w''$ einmal und setzt in $Q = M'$ ein, so folgt zunächst

$$Q = -(EI w'')'. \quad (2.2)$$

Nochmaliges Differenzieren liefert mit $Q' = -q$ und $EI = \text{const}$ die Differentialgleichung vierter Ordnung

$$EI w^{(4)} = q, \quad (2.3)$$

Basis der folgenden integrierten Modellierung von Linienlasten q und Punktlasten F , positiv in z -Richtung. Hier treten bei der Integration vier Integrationskonstanten auf, welche aus gegebenen geometrischen Randbedingungen (w bzw. w') und/oder statischen Randbedingungen (Kraftgrößen Q bzw. M) berechnet werden können.

2.2 Delta-Funktion und Föppl-Symbol

Das Integral über die Delta-Epsilon-Funktion (2.4) $\delta_\varepsilon(x - x_1)$, $\varepsilon \ll 1$ (Dirac-Impuls) hat unabhängig von ε stets einen Wert von Eins. Der lineare Abschnitt der zugehörigen Integralfunktion wird ein Sprung nach dem Grenzübergang $\varepsilon \rightarrow 0$, d.h. sie geht in die Heavyside-Funktion (2.5) $H(x - x_1)$ über. Ein Übergang zur Grenze $\varepsilon \rightarrow 0$ bei der δ_ε -Funktion (2.4) führt zu einem mathematisch sinnlosen Ausdruck und ist daher grundsätzlich verboten. Dagegen ist es durchaus möglich, den Grenzübergang $\varepsilon \rightarrow 0$ bei solchen Ausdrücken auszuführen, in denen $\delta_\varepsilon(x)$ unter einem Integral steht. Zur Abkürzung wird das **Symbol** $\delta(x)$ **definiert**: Es stimmt in nichtintegrierten Gleichungen mit dem Ausdruck (2.4) überein. Unter Integralen dagegen ist es durch

$$\int \delta(x - x_1) y(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int \delta_\varepsilon(x - x_1) y(x) dx$$

zu ersetzen [3].

$$\delta_\varepsilon(x - x_1) = \begin{cases} \frac{1}{2\varepsilon} & \text{für } x_1 - \varepsilon \leq x \leq x_1 + \varepsilon \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (2.4)$$

$$H(x - x_1) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^x \delta_\varepsilon(\xi - x_1) d\xi = \begin{cases} 0 & \text{für } x < x_1 \\ 1 & \text{für } x > x_1 \end{cases} \quad (2.5)$$

Das Föppl-Symbol 0. Ordnung ist mit der Heavyside-Funktion $H(x - x_1)$ identisch:

$$\langle x - x_1 \rangle^0 = H(x - x_1) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < x_1 \\ 1 & \text{für } x > x_1. \end{cases} \quad (2.6)$$

Bei der Integration der Balken-Differentialgleichung (2.3) erhält man Integrale der Heavyside-Funktion als stückweise definierte Polynome bis dritten Grades, darstellbar durch das Klammer-Symbol nach A. Föppl (im angelsächsischen Sprachraum wird es meist nach Macauley benannt):

$$\langle x - x_1 \rangle^n = \begin{cases} 0 & \text{für } x < x_1 \\ (x - x_1)^n & \text{für } x > x_1, \end{cases} \quad (2.7)$$

$$\int_0^x \langle \xi - x_1 \rangle^n d\xi = \frac{1}{(n+1)} \langle x - x_1 \rangle^{(n+1)}. \quad (2.8)$$

Bei der Differentiation und bei der Integration kann das Klammersymbol, gekennzeichnet durch spitze Klammern, wie eine runde Klammer behandelt werden [1].

3 Modellierung

Betrachtet werden allgemeine Linienlasten $q(x)$, z.B. in Form von Polygonzügen aber auch als analytische Ausdrücke, gemeinsam mit Punktlasten $F_i = F(x_i)$, die durch Deltafunktionen beschrieben werden und so mit der Linienlast einen geschlossenen Ausdruck für die Kraftdichte bilden:

$$EI w^{(4)} = q(x) + \sum_i F_i \delta(x - x_i). \quad (3.1)$$

Diskrete Punktlasten F_i werden durch das δ -Symbol, hier als δ_ε -Funktion, zu einer endlichen, konzentrierten Kraftdichte um die Stellen $x = x_i$ „aufgeweicht“. Erst nach Integration der Differentialgleichung kann der Grenzübergang zur „scharf konzentrierten“ Punktlast erfolgen, wie sie als physikalische Abstraktion verstanden wird.

Ziel ist es, den numerischen Lösungsanteil zu minimieren und analytische Möglichkeiten auszuschöpfen. Das gilt insbesondere für den Einfluss der Punktlasten, deren Integrale als Heavyside-Funktionen bzw. stückweise definierte Polynome ersten, zweiten und dritten Grades des Föppl-Symbols erscheinen [1], im Modell erzeugt durch diskrete Ereignisse mit zwei Funktionswerten an den Anschlussstellen $x = x_i$.

Die Separierung des numerisch zu behandelnden Teils erfolgt durch Definition einer Differentialgleichung vierter Ordnung für $u(x)$ mit identischen Anfangswerten und der Linienlast $q(x)$ als Störgröße:

$$EI w^{(4)} = EI u^{(4)} + \sum_i F_i \delta(x - x_i), \quad (3.2)$$

$$EI u^{(4)} = q(x), \quad u(0) = w(0), u'(0) = w'(0), u''(0) = w''(0), u^{(3)}(0) = w^{(3)}(0).$$

Für den gelenkig bei $x = 0$ und $x = l$ gelagerten Balken sind die Biegemomente M dort Null, so dass wegen $EI w'' = -M$ an den Rändern auch $w''(0) = w''(l) = 0$ gilt, neben $w(0) = w(l) = 0$.

Durch eine vorangestellte numerische Integration der Linienlast gelingt es, die Randwertaufgabe der Differentialgleichung vierter Ordnung von zwei auf einen am linken Rand zu bestimmenden Anfangswert zu reduzieren, was den Iterationsalgorithmus wesentlich vereinfacht. Hierzu löst man das Biegemoment $M(l) = 0$ am rechten Lager bei $x = l$ (Balkenlänge l) nach der Querkraft $Q(0)$ am linken Lager auf, die gemäß $EI w^{(3)} = -Q$ zu $w^{(3)}(0)$ proportional ist, so dass nur noch $w'(0)$ zu iterieren ist.

$$Q(0) = \frac{\sum_i F_i (l - x_i) + \int_0^l q(x)(l - x) dx}{l} \quad (3.3)$$

Die Biegelinie $w(x)$ resultiert durch Superposition der numerisch aus der Linienlast berechneten mit der analytisch ermittelten Komponente der Punktlasten:

$$w(x) = u(x) + \frac{1}{EI} \sum_i \frac{F_i}{6} \langle x - x_i \rangle^3. \quad (3.4)$$

Für das Biegemoment und die Querkraft sind auch die zweite und dritte Ableitung interessant:

$$\begin{aligned} w''(x) &= u''(x) + \frac{1}{EI} \sum_i F_i \langle x - x_i \rangle^1, \\ w^{(3)}(x) &= u^{(3)}(x) + \frac{1}{EI} \sum_i F_i \langle x - x_i \rangle^0. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Die Funktionskurve des Biegemoments hat Knicke an den Stellen der Punktlasten, in der Querkraft treten hier Sprünge auf.

4 Simulationsergebnisse

Numerisches Beispiel ist ein Stahlträger mit quadratischem Kastenprofil, der durch sein Eigengewicht und zwei Punktlasten bei $l/2$ und $2/3l$ deformiert wird. Mit typischen Materialkonstanten und spezifischem Flächenträgheitsmoment I werden Biegelinie, Momenten- und Querkraftverlauf berechnet.

Materialkonstanten: $\rho = 7.85 \text{ g/cm}^3$, $E = 2.1 \text{ e}5 \text{ N/mm}^2$. Träger: Profildicke $c = 300 \text{ mm}$,

Dicke $t = 15 \text{ mm}$, Länge $l = 10 \text{ m}$. Punktlasten: $F_1(l/2) = 1 \text{ e}5 \text{ N}$, $F_2(2/3l) = 2 \text{ e}5 \text{ N}$.

Flächenträgheitsmoment $I \approx 2/3 t c^3 = 2.7 \text{ e}8 \text{ mm}^4$, Biegesteifigkeit $EI = 5.67 \text{ e}13 \text{ Nmm}^2$.

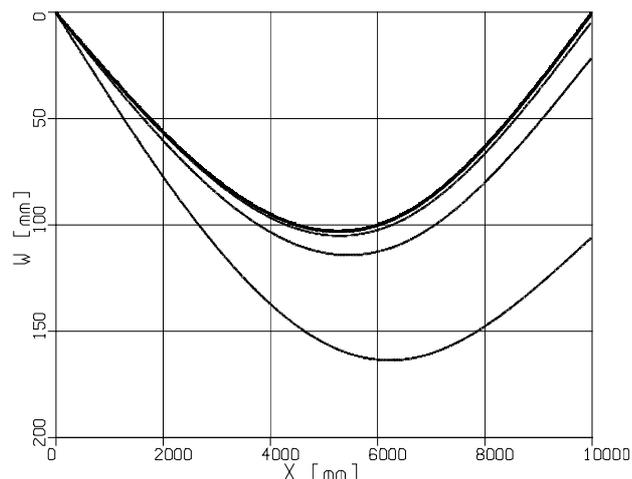


Bild 2: Iterationsschritte zur Biegelinie (Durchbiegung)

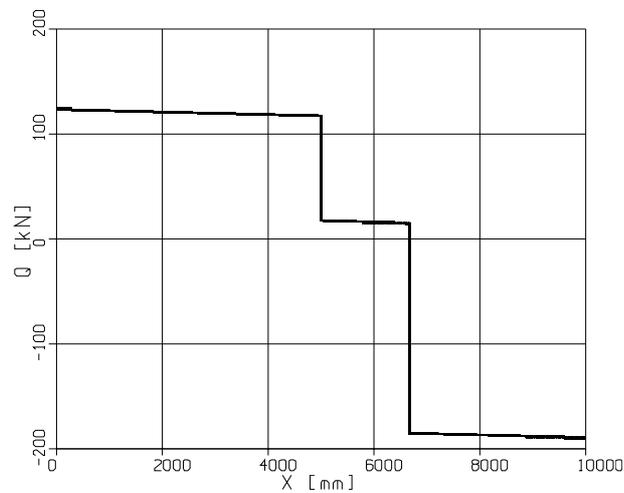


Bild 3: Verlauf der Querkraft mit Sprüngen bei den Punktlasten

Unabhängige Variable des Simulationsmodells ist hier die Ortskoordinate x , Werkzeug das Simulationssystem ACSL. Der Algorithmus zur Iteration des $w'(0)$, welches die Bedingung $w(l) = 0$ am rechten Rand erfüllt, ist in der Terminal-Section des Modells implementiert. Er korrigiert $w'(0)$ in wiederholten Läufen proportional zur Abweichung $w(l)$ am rechten Rand, bis eine Fehlerschranke ε eingehalten wird. Mit dem Newton-Verfahren lassen sich auch zwei Anfangswerte effektiv iterieren [2].

5 Schlussbetrachtung

Es wurde gezeigt, dass sich „aufgeweichte“ Punktlasten mittels der δ_ε -Funktion in Linienlasten zu geschlossenen Ausdrücken der Kraftdichte integrieren lassen. Nach analytischer Integration und Grenzübergang erhält man scharf konzentrierte Punktlasten gemäß der physikalischen Abstraktion. Die Lösung besitzt eine numerische und eine analytische Komponente. Der Ansatz ist Resultat physikalischer Betrachtungen.

6 Literatur

- [1] *Gross, D., Hauger, W., Schnell, W. und J. Schröder:* Technische Mechanik 1, Statik, 8. Auflage. Berlin Heidelberg: Springer-Verlag, 2004.
- [2] *Hohmann, R.:* Methoden und Modelle der Kontinuierlichen Simulation (Berichte aus der Informatik). Aachen: Shaker Verlag, 1999.
- [3] *Macke, W.:* Elektromagnetische Felder. Leipzig: Akademische Verlagsgesellschaft Geest & Portig K.-G., 1960.
- [4] *Schnell, W., Gross, D. und W. Hauger:* Technische Mechanik 2, Elastostatik, 4. Auflage. Berlin Heidelberg: Springer-Verlag, 1992.