

# **Modellierung und Simulation multiphysikalischer Phänomene am Beispiel von Rube-Goldberg-Mechanismen**

T. Pawletta, S. Pawletta  
t.pawletta@mb.hs-wismar.de  
Hochschule Wismar, FG Computational Engineering und Automation  
Philipp-Müller-Straße, PF 1210, D-23952 Wismar

## **Kurzfassung**

Im Beitrag werden Rube-Goldberg-Mechanismen vorgestellt; absurde technische Konstruktionen, die auf einfachen multiphysikalischen Phänomenen basieren. Anhand von zwei konkreten Mechanismen und den mit ihnen verbundenen Modellierungs- und Simulationsproblemen wird gezeigt, dass diese sich hervorragend als multiphysikalische Anwendungsbeispiele im Rahmen der Ausbildung zur Modellbildung/Simulation vorrangig kontinuierlicher Systeme eignen.

## **1 Einleitung**

Die Grundlagen der Modellbildung und Simulation werden in der Ingenieurausbildung in verschiedenen Lehrfächern vermittelt. In der Regel wird zwischen der Modellbildung/Simulation vorrangig kontinuierlicher Systeme, oft als Simulation technischer Systeme bezeichnet, und der Modellbildung/Simulation ereignisorientierter Systeme, oft als Simulation von Fertigungs- und Logistiksystemen benannt, unterschieden. Die Finite-Elemente-Methode wird zumeist fachbezogen im Rahmen verschiedener Lehrgebiete, wie zum Beispiel der Technischen Mechanik oder der Elektrotechnik, behandelt. Dieser Beitrag befasst sich ausschließlich mit allgemeinen Problemen der Modellbildung und Simulation vorrangig kontinuierlicher technischer Systeme.

Die Ausbildung auf dem Gebiet der Modellbildung und Simulation technischer Systeme beginnt in der Regel im Hauptstudium und soll mathematische sowie softwaretechnische Grundlagen mit technischem Anwendungsbezug vermitteln. Während zumindest vom Studienablauf her problemlos auf das Grundwissen der vorgelagerten Mathematik- und Informatikausbildung aufgesetzt werden kann, ist es oft schwierig einen umfassenden Bezug zu realitätsnahen technischen Systemen herzustellen, da das dafür notwendige Fachwissen noch nicht ausreichend verfügbar ist. Aus diesem Grund wird oft auf Standardbeispiele zurückgegriffen, deren Lösungen bereits in einer Vielzahl von Fachbüchern veröffentlicht wurden. Damit eignen sich diese nur bedingt für selbstständig zu bearbeitende Aufgaben. Dennoch sei an dieser Stelle auf die sehr gute Aufgabensammlung in [1] verwiesen.

In diesem Beitrag werden Rube-Goldberg-Mechanismen vorgestellt; absurde technische Konstruktionen, die auf einfachen multiphysikalischen Phänomenen basieren.

Anhand von zwei konkreten Mechanismen und den mit ihnen verbundenen Modellierungs- und Simulationsproblemen soll gezeigt werden, dass diese sich hervorragend als selbstständig zu bearbeitende Aufgabenstellungen eignen und dazu beitragen, die „Kunst des Modellierens und Simulierens“ zu erlernen.

## 2 Rube-Goldberg-Mechanismen

Rube Goldberg ist der Künstlername des 1883 in San Francisco geborenen Reuben Lucius Goldberg. Bekannt wurde er durch die comic-artige Darstellung absurder Maschinenmechanismen in der ersten Hälfte des 20. Jahrhunderts. Einen guten Einblick in seine Arbeiten geben [2] und [3].

Aus der Sicht eines dynamischen Systems bestehen Rube-Goldberg-Mechanismen aus verketteten Teilsystemen, die sich bei Erreichen von Schwellwerten aufeinanderfolgend aktivieren. Die Mechanismen basieren in der Regel auf einfachen optischen, mechanischen, elektrischen und thermodynamischen Phänomenen und stellen damit multiphysikalische Systeme dar. Die Abbildungen 1 und 2 zeigen zwei typische Rube-Goldberg-Mechanismen. Die Erläuterungen zur „Alarm Clock“ können direkt der Abbildung 1 entnommen werden. Der „Pencil Sharpener“ in Abbildung 2 arbeitet nach folgendem Grundprinzip: Nach Öffnen des Fensters **A** fliegt der Drache **B** und spannt die Schnur **C**, welche den Mottenkäfig **D** öffnet. Die Motten **E** zerfressen den Mantel **F**, wodurch sich der Schuh **G** absenkt und den Schalter **H** des Bügeleisens **I** einschaltet. Dadurch verbrennt der Stoff **J** und es steigt Qualm **K** im hohlen Baum **L** auf. Dadurch springt das Opossum **M** in den Korb **N**, welcher absinkt und über die Schnur **O** den Käfig **P** des Vogels **Q** öffnet. Dieser spitzt mit dem Schnabel den Bleistift **R** an. Sollten der Vogel oder das Opossum krank sein, muss manuell mit dem Messer **S** gearbeitet werden.

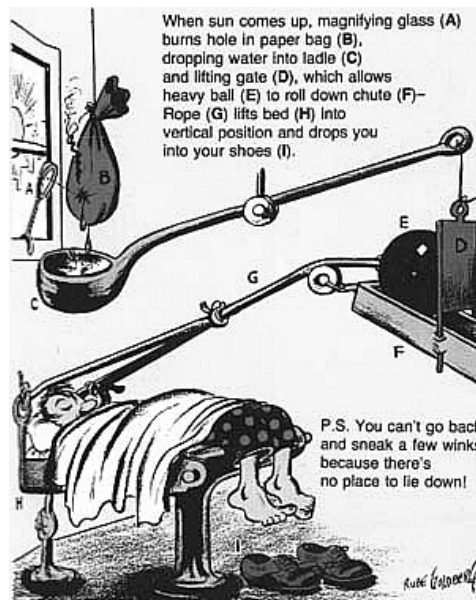
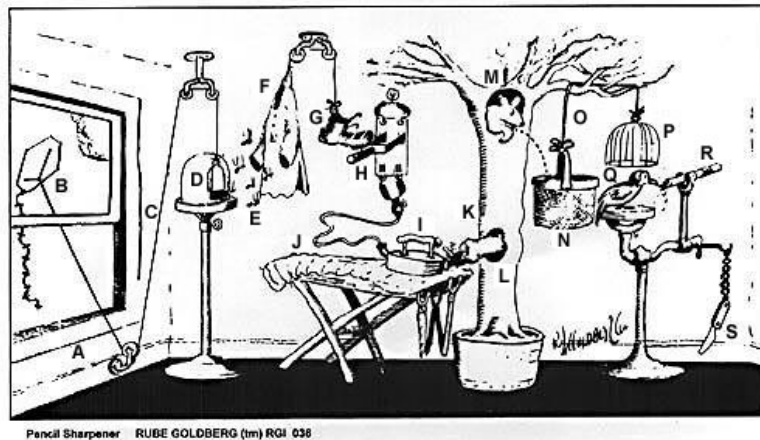


Abbildung 1: Alarm Clock nach Rube Goldberg in [3]



**Abbildung 2:** Pencil Scharpener nach Rube Goldberg in [3]

Aufgrund der relativ einfachen physikalischen Grundprinzipien eignen sich Rube-Goldberg-Mechanismen bereits zu Beginn des Fachstudiums als Anwendungsbeispiele für die Modellbildung/Simulation vorrangig kontinuierlicher technischer Systeme. Da viele Sachverhalte nur abstrakt dargestellt sind und keine Angaben bezüglich der Parametrierung vorliegen, verlangen sie vom Modellierer ein gewisses Maß an Abstraktionsvermögen und Kreativität. Damit eignen sie sich sehr gut, die „Kunst des Modellierens und Simulierens“ zu erlernen.

Unter der Kunst des Modellierens soll insbesondere die erste Phase der Modellbildung, der Abstraktionsprozess, verstanden werden. Dieser fällt Lernenden gerade bei multiphysikalischen und unscharf spezifizierten Systembeschreibungen schwer. Ist der Detaillierungsgrad erst einmal festgelegt, ein System freigeschnitten und sind zulässige Annahmen bezüglich Reibungseinflüssen, idealen Gaseigenschaften etc. getroffen, wird die weitere Modellbildung, d.h. die Spezifikation von Bilanzgleichungen, konstitutiven Beziehungen und Zufallseinflüssen, von den meisten Studenten relativ sicher beherrscht. Die Kunst des Simulierens umfasst insbesondere die softwaretechnische Umsetzung, die Auswahl geeigneter numerischer Lösungsverfahren, und die Planung von Simulationsexperimenten. Bei den Rube-Goldberg-Mechanismen ergeben sich aufgrund der sequentiell zu aktivierenden Teilsysteme entsprechende Anforderungen hinsichtlich der Programmstrukturierung. Die fehlenden Parametervorgaben erfordern oft mehrere Simulationsexperimente zur Bestimmung sinnvoller Parameterkombinationen. Dabei entstehen bei „ungünstigen“ Parametrierungen schnell dynamisch steife Systeme.

Untersuchungen mit Studenten zeigten, dass bei einer unabhängigen Aufgabebearbeitung sehr unterschiedliche Modelle und Simulationsprogramme entwickelt werden [4]. Damit eignen sich die Mechanismen hervorragend für selbstständig zu bearbeitende Aufgaben.

Im folgenden Abschnitt werden die beiden vorgestellten Mechanismen auszugsweise detaillierter betrachtet. Es werden beispielhaft die Herangehensweise der Studenten, d.h. der Abstraktionsprozess, aufgezeigt und einige Simulationsergebnisse präsentiert.

### 3 Modellierungsansätze, Simulationsprobleme & -ergebnisse

Der in Abbildung 1 dargestellte Alarm-Clock-Mechanismus besteht aus dynamischer Sicht aus vier über Zustandsereignisse verkettete Teilsysteme.

1. Einbrennen Auslaufloch in Wassersack (A,B); wenn  $\mathcal{G}_{sack}(t) \geq \mathcal{G}_{zünd} \Rightarrow 2$ .
2. Auslaufender Wassersack (B); wenn  $m_{wasser,ab}(t) \geq m_{kritisch} \Rightarrow 3$ .
3. Kellenhebel (C,D); wenn  $\varphi_{hebel}(t) \geq \varphi_{klappe,oben} \Rightarrow 4$ .
4. Kugel-Klappbett (E,F,G,H); wenn  $\varphi_{bett}(t) \geq 90^\circ \Rightarrow STOP$

Großen Gestaltungsspielraum bei der Modellierung bietet insbesondere das erste Teilsystem. Das Einbrennen eines Auslaufloches wird in der Regel mit einer einfachen Leistungsbilanz  $dE_{thermisch}/dt = P_{zu}(t) - P_{ab}(t)$  für ein finites Sackelement beschrieben. Bei der Berechnung von  $P_{zu}(t)$  werden sehr unterschiedliche Ansätze verfolgt. Während einige Studenten nur eine konstante Sonnenleistung ansetzten und die Lupenfläche sowie einen Lupen-Albedowert berücksichtigten, gehen andere sehr detailliert vor. Sie modellieren: den tageszeitlichen Sonnstand, den Einfallswinkel Sonne  $\rightarrow$  Lupe und Lupe  $\rightarrow$  Sack, die Bewegung des Lupenbrennpunktes beziehungsweise zufallsbedingte Wettereinflüsse in Form von Bewölkung und Wind.

Der generelle Modellansatz für den auslaufenden Wassersack lautet  $dm/dt = \mu * \rho * A * v_{ab}(t)$  ( $\mu$  Ausflusszahl,  $\rho$  Dichte,  $A$  Querschnittsfläche,  $v_{ab}$  Ausflussgeschwindigkeit). Unterschiedliche Modelle folgen hier aufgrund der vom Füllstand  $h(t)$  abhängigen Abflussgeschwindigkeit  $v_{ab}(t)$ , deren Berechnung von der Geometrie des Wassersackes abhängt. Auf Basis eigener Experimente mit Einkaufstüten modellierte ein Student auch eine füllstandsabhängige Sackgeometrie.

Die Modellierung des dritten und vierten Teilsystems beruht auf bekannten mechanischen Beziehungen. Dennoch gibt es verschiedene Modellansätze, zum Beispiel aufgrund von unterschiedlichen Annahmen zu Reibungseinflüssen oder den Seileigenschaften (starr, federelastisch).

Die Implementierungen der Simulationsmodelle unterscheiden sich trotz Verwendung der gleichen Simulationsumgebung (Matlab/Simulink) gravierend. Bezüglich der Simulation zeigte sich, dass bei etwas detaillierterer Modellierung das Modell oft nicht mehr mit den einfachen expliziten Runge/Kutta-Verfahren (ode23, ode45) berechenbar ist. Die besten Ergebnisse ergaben sich in der Regel mit dem für steife Systeme geeigneten ode23tb Verfahren.

Für den in Abbildung 2 dargestellten Pencil-Sharpener-Mechanismus sind in Abbildung 3 beispielhaft die Simulationsergebnisse eines Anspitzvorganges dargestellt, welcher in diesem Fall etwa 3 Minuten und 15 Sekunden dauerte. Die Aktivierung der dynamischen Teilsysteme und die dazu definierten Zustandsereignisse können im wesentlichen der Abbildung 3 entnommen werden. Da der Sprung des Opossums **M** und damit der sinkende Korb **N** sowie der sich öffnende Vogelkäfig **P** eine hohe Dynamik besitzen, sind deren Zeitfunktionen gezoomt im Plot A1 der Abbildung 3 dargestellt. Der Anspitzfortschritt durch den Vogel **Q** zeigt der gezoomte Plot A2 der Abbildung 3.

Hinsichtlich der Modellbildung/Simulation bietet der Pencil-Sharpener-Mechanismus ähnliche Gestaltungsfreiräume und Anforderungen wie der Alarm-Clock-Mechanismus.

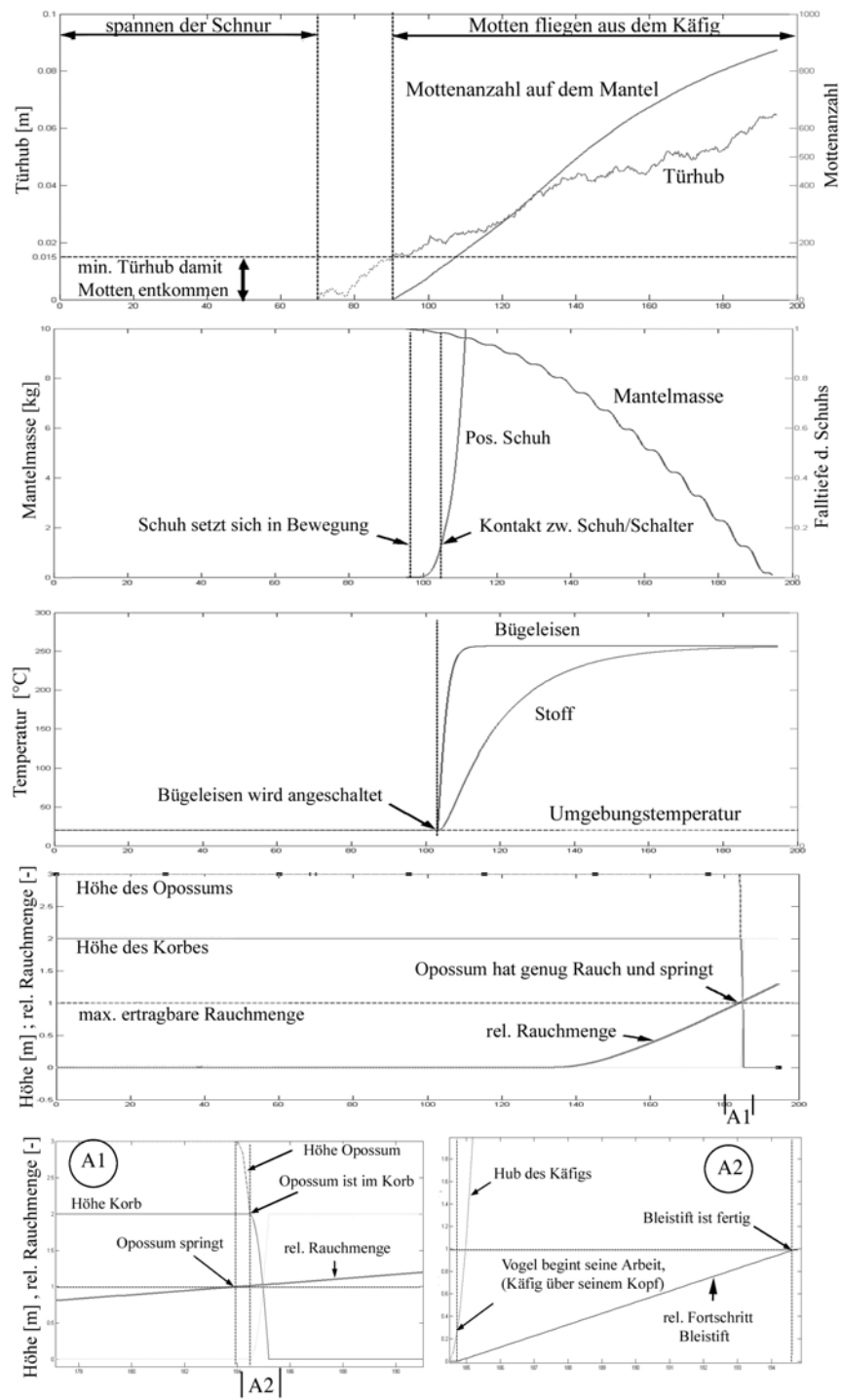


Abbildung 3: Simulationsergebnisse des Systems Pencil Sharpener

Dies soll beispielhaft an der Herangehensweise eines Studenten bei der Modellierung des Mottenausflugs aus dem Käfig (**D**, **E**) sowie der Mantelmassenänderung durch Mottenfraß (**E**, **F**) aufgezeigt werden.

„... Motten können aus dem Käfig entweichen, wenn die Käfigtür durch den Drachen einen Mindesthub erreicht hat. Die Anzahl der aus dem Käfig entwichenen Motten  $N_{Ma}(t)$  ergibt sich aus einer Proportionalitätsbetrachtung. Es wird postuliert, dass mit zunehmender Mottendichte (Mottenanzahl/Volumeneinheit) mehr Motten pro Zeiteinheit durch die Käfigöffnung entweichen. Desweiteren soll die Änderungsrate direkt proportional zu der geöffneten Fläche  $A$  des Käfigs sein, die vom Türhub  $h(t)$  durch den Drachen abhängt. Damit folgt für die Änderungsrate der Mottenanzahl im Käfig  $dN_{Mi}/dt = -(K * A * N_{Mi}(t)) / V$ , mit  $K$  Proportionalitätsfaktor und  $V$  Käfigvolumen. Für die Anzahl ausgeflogener Motten gilt damit  $N_{Ma}(t) = N_{Mi}(t_0) - N_{Mi}(t)$ .

Die Flugzeit der Motten vom Käfig zum Mantel wird vernachlässigt. Weiterhin wird angenommen, dass die Motten über keine Eigenmasse verfügen und somit den Mantel nicht beschweren. Sie erhalten auch keine Masse durch den Verzehr des Mantels. Die von ihnen gefressene Mantelmaterie wird sofort wieder ausgeschieden und fällt zu Boden. Außerdem wird von einem sinusähnlichen Fresszyklus der Motten ausgegangen, d.h. der Mottenhunger schwankt zwischen Null und einer maximalen Fressrate  $FR$ . Damit folgt für die Änderungsrate der Mantelmasse

$$dm_{mantel}/dt = -FR * N_{Ma}(t) * \sin(w * t).“$$

## 4 Zusammenfassung

Die Autoren nutzen seit fünf Jahren Rube-Goldberg-Mechanismen als selbstständige Übungsaufgaben im Rahmen des Lehrgebietes Simulation technischer Systeme, welches durch Maschinenbau-, Verfahrenstechnik- und Elektrotechnikstudenten belegt wird. Die Studenten können ihre Aufgaben aus einem Pool wählen und es zeigte sich, dass die Rube-Goldberg-Mechanismen vor allem von sehr guten Studenten ausgewählt und mit enormen Eifer bearbeitet werden. In einigen Jahrgängen entwickelte sich ein regelrechter Wettbewerb hinsichtlich der Modelldetaillierung und der Bestimmung sinnvoller Systemparameter.

## Literatur

- [1] *Scherf, H.E.*: Modellbildung und Simulation dynamischer Systeme. München: Oldenbourg Verlag, 2003.
- [2] *Wolfe, M.F.*: Rube Goldberg Inventions. New York: Simon & Schuster Pub., 2000.
- [3] The Official Rube Goldberg Web Site. <http://www.rube-goldberg.com>
- [4] *Studenten der Hochschule Wismar*: Abschlussbelege im Lehrgebiet Simulation technischer Systeme. Wismar: Hochschule Wismar, 2001-2005.