Entwicklung und Anwendung der Fuzzy-stochastischen Finite-Elemente-Methode (FSFEM)

Jan-Uwe Sickert, Wolfgang Graf, Bernd Möller
jsickert@rcs.urz.tu-dresden.de
Technische Universität Dresden, Institut für Statik und Dynamik der Tragwerke
01062 Dresden

Kurzfassung

Nach einer kurzen Klassifikation unterschiedlicher Unschärfecharakteristiken werden die mathematischen Modelle zur Beschreibung von Datenunschärfe als Fuzziness, Zufälligkeit und Fuzzy-Zufälligkeit skizziert. Das Modell Fuzzy-Zufälligkeit, das die Modelle Fuzziness und Zufälligkeit als Sonderfälle enthält, bildet u.E. die umfassendste Beschreibungsmöglichkeit. Mit der Theorie der Fuzzy-Zufallsfunktionen wurden die Grundlagen für die gleichzeitige Erfassung von Fuzzy-Zufallsfunktionen, Zufallsfunktionen und Fuzzy-Funktionen bei der Tragwerksanalyse geschaffen sowie die Fuzzy-stochastische Finite-Elemente-Methode (FSFEM) entwickelt. Das Vorgehen der FSFEM ist auf numerische Simulationen mit komplexen nichtlinearen deterministischen Grundlösungen und unscharfen Daten übertragbar, so daß Aufgaben aus unterschiedlichen Wissenschaftsgebieten gelöst werden können. Im Beitrag wird das Leistungsvermögen der Algorithmen an einem Beispiel der Tragwerksanalyse demonstriert.

1 Zur Modellierung von Datenunschärfe

Das mechanische Verhalten von Tragwerken kann nur dann realitätsnah beurteilt werden, wenn alle Eingangsdaten zutreffend beschrieben werden und ein wirklichkeitsnahes Berechnungsmodell eingesetzt wird. Eingangs- und Modellparameter liegen i.d.R. nur unscharf vor.

Häufig existieren für unscharfe Parameter nur Stichproben mit begrenzter Anzahl von Stichprobenelementen, aus denen eine formale mathematische Beschreibung der Unschärfe zu entwickeln ist. Die Testtheorie der klassischen Statistik erlaubt die Testung einer Stichprobe auf Zufälligkeit. Falls die Stichprobe nicht die Eigenschaft Zufälligkeit besitzt, sind andere Unschärfemodelle einzusetzen.

Unschärfe von Daten, die aus subjektiven Informationen und Einschätzungen resultiert und nichtstochastische Eigenschaften besitzt, wird der Charakteristik Fuzziness zugeordnet. Mathematische Grundlage ist die Fuzzy-Set-Theorie [2]. Ursachen für Fuzziness sind Informationslücken, subjektive Empfindungen von Einzelpersonen, die lexikalische Beschreibung physikalischer Größen oder nicht vermeidbare Ungenauigkeiten bei der Ermittlung von Meßwerten. Die Quantifizierung der Fuzziness mit Fuzzy-Größen erlaubt es, den Einfluß individueller Gegebenheiten – wie den Einsatz neuer und seltener Materialien, Technologien und Konstruktionsarten – auf die Tragfähigkeit und Sicherheit zu übertragen.

Fuzzy-Zufälligkeit tritt auf, wenn Zufallsgrößen, Zufallsprozesse bzw. Zufallsfunktionen – z.B. als Ergebnis nicht konstanter Peproduktionsbedingungen – nicht exakt beobachtet werden können. Sie umfaßt objektive und subjektive Informationen. Die Theorie der Fuzzy-Zufallsgrößen bildet die mathematische Basis. Mit Fuzzy-Zufälligkeit können Parameter beschrieben werden, die teilweise stochastische Eigenschaften besitzen, deren statistische Beschreibung nicht zweifelsfrei möglich ist. Der Umfang vorliegender Informationen ist jedoch größer als für die Modellierung von Fuzzy-Größen notwendig. Fuzzy-Zufälligkeit liegt auch vor, wenn die Stichprobenelemente einer zufälligen Stichprobe unscharf im Sinne von Fuzzy-Größen sind.

Viele Material-, Geometrie- und Lastparameter sind fuzzy-zufällig in Raum und Zeit veränderlich. Zeitveränderlich streuende Einflüssen wie Materialschädigung, Systemmodifikation und Belastungsänderungen verursachen eine zeitabhängige Änderung der Tragfähigkeit und Tragwerkssicherheit. Die Ortsabhängigkeit der Unschärfe ist Folge der natürlichen Inhomogenität von Materialien. Auch auf der Makroebene scheinbar homogene Materialien wie Baustahl sind bei feiner Auflösung auf Meso-, Mikro- oder Nanoebene inhomogen. Die Folge sind von Materialpunkt zu Materialpunkt variierende mechanische Eigenschaften. Ohne die zutreffende Erfassung dieser räumlich veränderlichen Unschärfe können viele beobachtbare Effekte nicht erklärt und simuliert werden.

Zur mathematischen Beschreibung dieser Parameter werden Fuzzy-Zufallsfunktionen eingeführt, die bei der nichtlinearen Tragwerksanalyse mit Hilfe der Fuzzy-stochastische Finite-Elemente-Methode (FSFEM) berücksichtigt werden.

Die Unschärfemodelle Fuzziness und Zufälligkeit sind als Sonderfall von Fuzzy-Zufallsfunktionen erfaßbar. Die Algorithmen der FSFEM erlauben, die für den Sonderfall Fuzziness entwickelte Fuzzy-Finite-Elemente-Methode ebenfalls numerisch zu lösen [3].

2 Fuzzy-Zufallsfunktionen

Räumlich und zeitlich variierende Unschärfe, die durch Fuzzy-Zufälligkeit charakterisiert ist, wird mathematisch mit Fuzzy-Zufallsfunktionen beschrieben. Eine Fuzzy-Zufallsfunktion $\underline{\tilde{X}}(\underline{t})$ ist das Ergebnis der unscharfen Abbildung $\underline{\mathbf{T}} \times \Omega$ auf die Menge der Fuzzy-Größen $\mathbf{F}(\mathbb{R}^n)$ im $\mathbb{R}^n$ mit $\underline{\mathbf{T}}$ Raum der unabhängigen Parameter und Ω Raum der Elementarereignisse. Da die Realisierungen $\underline{\tilde{x}}(\underline{t})$ zufälliger Elementarereignisse $\omega \in \Omega$ nur unscharf wahrnehmbar sind, können Fuzzy-Zufallsfunktionen als fuzzifizierte Zufallsfunktion interpretiert werden. Die Funktion $\underline{\tilde{X}}(\underline{t})$ ist dann als Menge von Fuzzy-Zufallsgrößen aller $\underline{t} \in \underline{\mathbf{T}}$ definiert [1].

Fuzzy-Zufallsfunktionen werden mit Hilfe ihrer gemeinsamen mehrdimensionalen, univariaten Fuzzy-Wahrscheinlichkeitsverteilungsfunktion $\tilde{F}(\underline{x}, \underline{t})$ beschrieben. Alternativ können die eindimensionalen Fuzzy-Wahrscheinlichkeitsverteilungsfunktionen $\tilde{F}(x, \underline{t})$ der Randverteilungen und die Fuzzy-Kovarianzen verwendet werden. In beiden Varianten können Fuzzy-Wahrscheinlichkeitsverteilungsfunktion kann auch in Scharparameterdarstellung formuliert werden, $\tilde{\mathrm{F}}(\underline{\mathrm{x}}, \underline{\mathrm{t}}) = \mathrm{F}(\underline{\tilde{\mathrm{s}}}, \underline{\mathrm{x}}, \underline{\mathrm{t}})$.

Fuzzy-Scharparameter $\tilde{\mathrm{s}}_{\mathrm{i}}$ können z.B. Fuzzy-Verteilungsparameter oder Fuzzy-Momente sein. Eine Fuzzy-Wahrscheinlichkeitsverteilungsfunktion vom Typ Ex-max-I (Gumbel-Verteilung) am Punkt $\underline{\mathrm{t}}$ hat die Form

$$\mathrm{F}(\underline{\tilde{\mathrm{s}}}, \mathrm{x}, \underline{\mathrm{t}}) = \tilde{\mathrm{F}}_{\mathrm{t}}(\underline{\tilde{\mathrm{s}}}, \mathrm{x}) = \exp(-\exp(-\tilde{\mathrm{s}}_1(\mathrm{x} - \tilde{\mathrm{s}}_2))) \tag{1}$$

Zur Generierung der Fuzzy-Wahrscheinlichkeitsverteilungsfunktionen werden anerkannte Methoden der schließenden Statistik so erweitert, daß auch die Fuzziness der vorliegenden Daten erfaßt wird [2], [7].

3 FSFEM-Algorithmen

Die Berücksichtigung räumlich verteilter Unschärfe mit Fuzzy-Zufallsfunktionen führt bei der numerischen Simulation des Verhaltens von Tragwerken auf der Basis der Finite-Elemente-Methode (FEM) auf die Fuzzy-stochastische Finite-Elemente-Methode [6]. Mit der FSFEM gelingt die Abbildung fuzzy-zufälliger Eingangsgrößen $\underline{\tilde{\mathrm{X}}}(\underline{\mathrm{t}})$ auf fuzzy-zufällige Systemantworten $\underline{\tilde{\mathrm{Z}}}(\underline{\mathrm{t}})$, (z.B. Spannungen, Deformationen).

Alle Fuzzy-Zufallsfunktionen werden an ausgewählten Punkten $\underline{\mathrm{t}}$ des Parameterraumes $\underline{\mathbf{T}}$ diskretisiert. Damit sind an p Punkten korrelierte Fuzzy-Zufallsgrößen $\tilde{\mathrm{X}}_{\mathrm{i}}|\mathrm{i} = 1, ..., \mathrm{p}$ und die zugehörigen Fuzzy-Wahrscheinlichkeitsverteilungsfunktionen $\tilde{\mathrm{F}}_{\mathrm{i}}(\mathrm{x}) = \mathrm{F}_{\mathrm{i}}(\underline{\tilde{\mathrm{s}}}, \mathrm{x})$ bestimmt.

Zur Darstellung aller $\mathrm{F}_{\mathrm{i}}(\underline{\tilde{\mathrm{s}}}, \mathrm{x})$ werden n Fuzzy-Scharparameter $\tilde{\mathrm{s}}_1, ..., \tilde{\mathrm{s}}_{\mathrm{n}}$ benötigt, die in α-Niveaumengen diskretisiert werden. Aus den α-Niveaumengen werden scharfe Elemente $\hat{\mathrm{s}}_{1,\alpha}, \hat{\mathrm{s}}_{2,\alpha}, ..., \hat{\mathrm{s}}_{\mathrm{n},\alpha}$ ausgewählt. Die Elemente $\hat{\mathrm{s}}_{1,\alpha}, \hat{\mathrm{s}}_{2,\alpha}, ..., \hat{\mathrm{s}}_{\mathrm{n},\alpha}$ beschreiben demnach ein Original $\underline{\mathrm{X}}_{\mathrm{i}}$ der Fuzzy-Zufallsgröße $\underline{\tilde{\mathrm{X}}}_{\mathrm{i}}$ auf dem Niveau α. Dem Original $\underline{\mathrm{X}}_{\mathrm{i}}$ ist die reellwertige Wahrscheinlichkeitsverteilungsfunktion $\hat{\mathrm{F}}_{\mathrm{i},\alpha}(\underline{\mathrm{x}})$zugeordnet.

Nach der Auswahl der Elemente $\hat{\mathrm{s}}_{1,\alpha}, \hat{\mathrm{s}}_{2,\alpha}, ..., \hat{\mathrm{s}}_{\mathrm{n},\alpha}$ sind p Funktionen $\hat{\mathrm{F}}_{\mathrm{i},\alpha}(\underline{\mathrm{x}})|\mathrm{i} = 1, ..., \mathrm{p}$ für p Originale gegeben. Mit diesen Originalen als Eingangsgrößen werden die reellwertigen Wahrscheinlichkeitsverteilungsfunktionen $\hat{\mathrm{F}}_{1,\alpha}(\underline{\mathrm{z}}), \ \ldots, \ \hat{\mathrm{F}}_{\mathrm{r},\alpha}(\underline{\mathrm{z}})$ für r Originale $\mathrm{Z}_{\mathrm{j}}|\mathrm{j} = 1, ..., \mathrm{r}$ der Fuzzy-Zufallsgröße $\underline{\tilde{\mathrm{Z}}}_{\mathrm{j}}(\underline{\mathrm{t}})$ berechnet. Die Lösung kann mit Methoden der stochastischen Analyse, z. B. der Monte-Carlo-Simulation (MCS), gefunden werden [5]. Eingeschlossen in die stochastische Analyse ist eine nichtlineare deterministische Tragwerksberechnung auf der Basis der FEM, s. z.B. [4]. Die mit der MCS erzeugte Stichprobe wird stochastisch ausgewertet, um die Parameter und den Typ der Verteilung für die $\hat{\mathrm{F}}_{1,\alpha}(\underline{\mathrm{z}}), \ \ldots, \ \hat{\mathrm{F}}_{\mathrm{r},\alpha}(\underline{\mathrm{z}})$ zu bestimmen.

Mit den Fuzzy-Scharparametern $\underline{\tilde{\sigma}}$ lautet die Funktion $\hat{\mathrm{F}}_{\mathrm{j},\alpha}(\underline{\mathrm{z}})$ in Scharparameterdarstellung $\mathrm{F}_{\mathrm{j}}(\underline{\tilde{\sigma}}, \ \underline{\mathrm{z}})$. Elemente der $\underline{\tilde{\sigma}}$ sind Parameter der Fuzzy-Funktionen $\tilde{\mathrm{F}}_{\mathrm{j}}(\underline{\mathrm{z}})$ = $\mathrm{F}_{\mathrm{j}}(\underline{\tilde{\sigma}}, \ \underline{\mathrm{z}})$ (z. B. Fuzzy-Erwartungswert, Fuzzy-Varianz). Auf dem Niveau α sind nach Auswertung einer Stichprobe die den $\hat{\mathrm{F}}_{\mathrm{j},\alpha}(\underline{\mathrm{z}})$ zugeordneten Elemente $\hat{\sigma}_{1,\alpha}, \ \ldots, \ \hat{\sigma}_{\mathrm{m},\alpha}$ bekannt. Unter der Voraussetzung, daß die $\tilde{\sigma}_k$ konvexe Fuzzy-Größen sind, können die α-Niveaumengen

$\sigma_{1,\alpha}, \ \ldots, \ \sigma_{m,\alpha}$ näherungsweise bestimmt werden, wenn auf jedem Niveau α die Elemente $\sup[\sigma_{k,\alpha} \mid \underline{s} \in \underline{s}_{\alpha}; \, k = 1, \ \ldots, \ m]$ und $\inf[\sigma_{k,\alpha} \mid \underline{s} \in \underline{s}_{\alpha}; \ k = 1, \ldots, \ m]$ bestimmt sind. Dieses Optimierungsproblem wird effizient mit der in [2] vorgeschlagenen α-Level-Optimierung gelöst.

Mit den $\tilde{F}_j(\underline{z})$ kann die Fuzzy-Wahrscheinlichkeit für die Überschreitung normativ zulässiger Systemantworten angegeben werden. Mit der sicherheitszielorientierten Bemessung auf der Basis von Clustermethoden [2] sind Bewertungen des Tragwerksentwurfs möglich.

4 Beispiel

Der Wasserturm in Krümmel (Abb. 1) wurde 1916 gebaut und steht auf dem Gelände der ehemals weltweit ersten Dynamitfabrik. Derzeit werden Möglichkeiten zur Revitalisierung des Turmes gesucht und geprüft, ob die Kuppel innen und außen mit Textilbetonschichten ertüchtigt werden kann. Textilbeton besteht aus Feinbeton und grobmaschigen Textilien, die aus Rovings mit 400 bis 1600 alkaliresistenten Glasfilamenten oder Carbonfilamenten hergestellt werden.

Abbildung 1: Wasserturm, aktueller Zustand

Die Tragfähigkeit und die Dauerhaftigkeit der Kuppel werden in zwei Schritten untersucht. In einem ersten Schritt werden aus wenigen gemessenen Daten scharfe Größen bestimmt und nichtlineare deterministische Tragwerksanalysen mit FE-Berechnungsmodellen nach [4] durchgeführt. Die simulierte Lastgeschichte orientiert sich an den Grundlastfällen (Eigengewicht, Verkehrslast, Schnee, Wind, Temperatur). Mit den Grundlastfällen werden Kombinationen gebildet und diese zu Lastprozessen zusammengefaßt. Die Lastprozesse werden inkremental abgearbeitet und ausgewählte Kombinationen bis zum Systemversagen gesteigert. Abb. 2a zeigt exemplarisch Radialspannungen, Verschiebungen und Risse an der Kuppelaußenseite (Textilbetonschicht) infolge eines Lastprozesse mit Eigengewicht, Schnee und extremer Windlast.

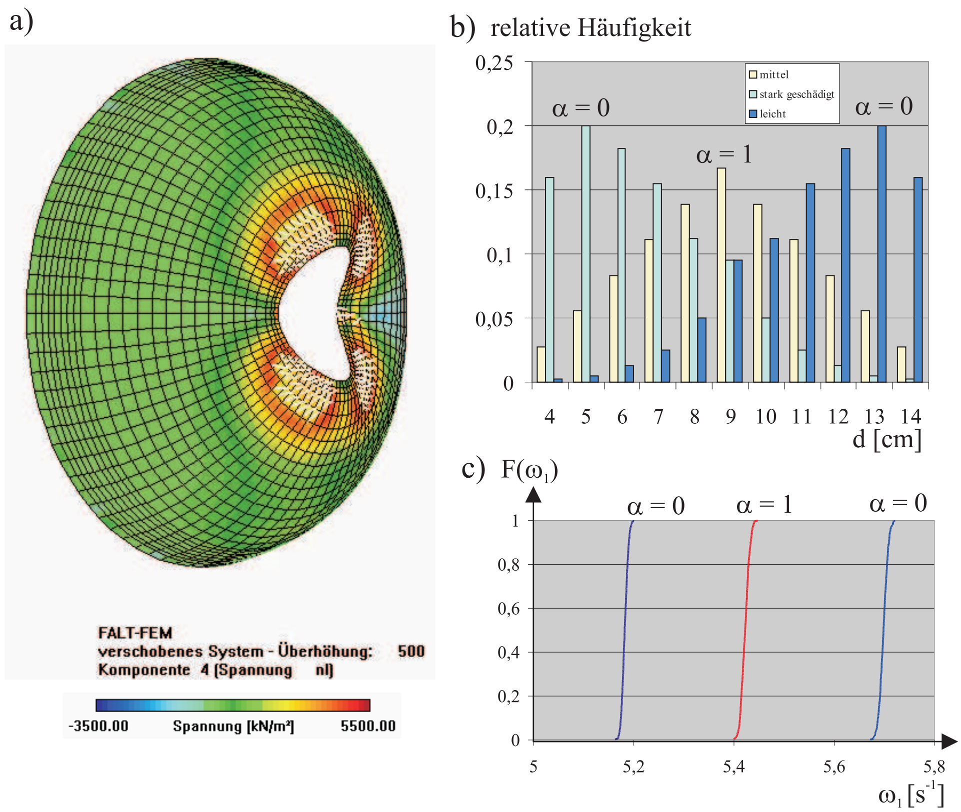

Abbildung 2: a) Radialspannungen, Verformungen und Risse – äußere Verstärkungsschicht, b) Fuzzy-Häufigkeitsverteilung der Kuppeldicke, c) empirische Fuzzy-Wahrscheinlichkeitsverteilungsfunktion der ersten Eigenfrequenz

Da für die Material- und Geometrieparameter nur sehr wenige gemessene Daten vorliegen, werden in einem zweiten Schritt mit Hilfe der Fuzzy-stochastischen Finite-Elemente-Methode die Tragfähigkeit beurteilt und die Sensitivität bewertet. Die Schädigung der Kuppel wird mit einer Fuzzy-Zufallsfunktion für die Dicke erfaßt, d.h., die finiten Elemente besitzen fuzzy-zufällig verteilt unterschiedliche Dicken. Wegen des großen Informationsdefizits wird die Schädigung in leicht, mittel und stark unterschieden und durch verschiedene relative Häufigkeitsverteilungen für die Schalendicke ausgedrückt, Abb. 2b. Die Fuzzy-Häufigkeitsverteilung kennzeichnet die subjektive Einschätzung durch Experten. Zusätzlich wird der Elastizitätsmodul des Betons als korreliertes normalverteiltes Zufallsfeld modelliert. Da Veränderungen der Eigenfrequenzen kritische Belastungen und Schädigungszustände sensitiv anzeigen, wird die erste Eigenfrequenz als skalare fuzzy-zufällige Systemantwort mit der oben beschriebenen deterministischen Grundlösung berechnet. Die empirische Fuzzy-Wahrscheinlichkeitsverteilungsfunktion (Abb. 2c) ist das Ergebnis von 1800 nichtlinearen Simulationen mit einem Lastprozeß, der den Gebrauchszustand beschreibt. Es ist zu erkennen, daß der mit Fuzziness modellierte Grad der Schädigung zu größeren Veränderungen der Eigenfrequenz (Abstände zwischen den blauen Linien für $\alpha = 0$) führt als die zufällige Verteilung der Dicken (Anstiege der beiden blauen und der roten Linien).

Literatur

[1] *Möller, B.*: Fuzzy randomness - a contribution to imprecise probability. Special Issue of ZAMM, 84(10–11), pp. 754–764, 2004.

[2] *Möller, B.* and *Beer, M.*: Fuzzy Randomness - Uncertainty in Civil Engineering and Computational Mechanics. Springer Verlag, Berlin, 2004.

[3] *Möller, B.*, *Beer, M.*, *Graf, W.*, and *Sickert, J.-U.*: Fuzzy finite element method and its application. In: *Wall, W. A.*, *Bletzinger, K.-U.*, and *Schweizerhof, K.* (eds.): Trends in Computational Structural Mechanics, Colloquium 2001, pp. 529–538. CIMNE Barcelona, 2001.

[4] *Möller, B.*, *Graf, W.*, *Hoffmann, A.*, and *Steinigen, F.*: Numerical simulation of rc structures with textile reinforcement. Computers and Structures, 83, pp. 1659–1688, 2005.

[5] *Pradlwarter, H. J.*, *Schuëller, G. I.*, and *Schenk, C. A.*: A computational procedure to estimate the stochastic dynamic response of large non-linear fe-models. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 192(7–8), pp. 777–801, 2003.

[6] *Sickert, J.-U.*, *Beer, M.*, *Graf, W.*, and *Möller, B.*: Fuzzy probabilistic structural analysis considering fuzzy random functions. In: *Kiureghian, A. D.*, *Madanat, S.*, and *Pestana, J. M.* (eds.): 9th Int. Conference on Applications of Statistics and Probability in Civil Engineering, pp. 379–386. Universität of California, Berkeley, 2003.

[7] *Viertl, R.* and *Hareter, D.*: Fuzzy information and imprecise probability. Special Issue of ZAMM, 84(10–11), pp. 731–739, 2004.